

Irrationalité d'un q -analogue de $\zeta(2)$

Daniel DUVERNEY

Résumé – Nous démontrons l'irrationalité, pour $q \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, du nombre $\zeta(q; 2) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n ((q-1)/(q^n-1))^2$.

Irrationality of a q -analogue of $\zeta(2)$

Abstract – We prove the number $\zeta(q; 2) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n ((q-1)/(q^n-1))^2$ to be irrational for $q \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$.

Pour $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$, on pose :

$$(1) \quad \zeta(q; 2) = \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \left(\frac{q-1}{q^n-1} \right)^2.$$

Le nombre $\zeta(q; 2)$ peut être considéré comme un q -analogue de $\zeta(2)$, car :

$$(2) \quad \lim_{q \rightarrow 1} \zeta(q; 2) = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(Sur les q -analogues, le lecteur pourra consulter [6] et [7].)

Donnons deux autres expressions de $\zeta(q; 2)$; en premier lieu :

$$\zeta(q; 2) = (q-1)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n} \left(1 - \frac{1}{q^n} \right)^{-2} = (q-1)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{q^{nk}},$$

d'où, après interversion des sommations en n et k :

$$(3) \quad \zeta(q; 2) = (q-1)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n - 1}.$$

La troisième expression de $\zeta(q; 2)$ s'obtient en remarquant que la série figurant dans (3) est une série de Lambert ([8], p. 257), et on a, en notant

$$(4) \quad d_m(n) = \sum_{d|n} d^m :$$

$$(5) \quad \zeta(q; 2) = (q-1)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_1(n)}{q^n}.$$

Sous la forme (5), le problème de l'irrationalité de $\zeta(q; 2)$ a été posé, à plusieurs reprises, par Paul Erdős ([4], [5]). Le but de cette Note est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. – Si $q \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, $\zeta(q; 2)$ est irrationnel.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

Démonstration. — On part de la célèbre identité d'Euler sur les nombres pentagonaux, qui se démontre à partir de la formule du triple produit de Jacobi ([2], p. 124; [6], p. 229). Posons, pour $|x| < 1$:

$$(6) \quad f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^n).$$

Alors :

$$(7) \quad f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n(3n+1)/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{n(3n-1)/2}.$$

On en déduit :

$$(8) \quad x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(3n+1)}{2} x^{n(3n+1)/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n(3n-1)}{2} x^{n(3n-1)/2}.$$

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — Si $q \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, les nombres 1, $f(1/q)$ et $(1/q)f'(1/q)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration du lemme. — Il suffit de prouver que, si a et b sont des entiers rationnels non tous les deux nuls, le nombre $\alpha_q = af(1/q) + b \cdot (1/q)f'(1/q)$ est irrationnel. Or, en vertu de (7) et (8) :

$$(9) \quad \begin{aligned} \alpha_q = a + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(a + b \frac{n(3n+1)}{2} \right) q^{-(n(3n+1))/2} \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(a + b \frac{n(3n-1)}{2} \right) q^{-(n(3n-1))/2}. \end{aligned}$$

Pour prouver l'irrationalité de α_q , on utilise le théorème 2 de [3], en écrivant :

$$(10) \quad \alpha_q = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n) q^{-n}.$$

En notant $n_k = k(3k+1)/2$, on observe que :

$$(11) \quad a(n_k + 1) = a(n_k + 2) = \dots = a(n_k + k) = 0.$$

On a par ailleurs $|a(n)| \leq n^2$ pour n assez grand. On peut donc appliquer le théorème 2 de [3] : si $x_q = \eta/\delta$, avec $(\eta, \delta) \in \mathbb{Z}^2$, on a pour k assez grand :

$$(12) \quad \eta q^{n_k} - \delta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k-n} = 0.$$

Puisque l'on a aussi $a(n_k - 1) = a(n_k - 2) = \dots = a(n_k - k + 1) = 0$, on déduit de (12) que q^k divise $\delta a(n_k)$ pour k assez grand. Or :

$$(13) \quad \delta a(n_k) = \delta (-1)^k \left(a + b \frac{k(3k+1)}{2} \right).$$

Puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls, ceci est impossible, et le lemme est démontré.

On en déduit facilement le théorème, en suivant la démarche utilisée par Peter Bundschuh et Keijo Väänänen pour obtenir l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(q^n - 1)$ dans [1]; on remarque que :

$$(14) \quad x \frac{f'(x)}{f(x)} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^n)'}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{1-x^n},$$

de telle sorte que :

$$(15) \quad \frac{(1/q) f'(1/q)}{f(1/q)} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{q^n - 1}.$$

Le théorème résulte donc immédiatement du lemme et de (3).

Note remise le 18 septembre 1995, acceptée après révision le 25 septembre 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. BUNDSCHUH et K. VÄÄNÄNEN, Arithmetical investigations of a certain infinite product, *Compositio Math.*, 91, 1994, p. 175-201.
- [2] K. CHANDRASEKHARAN, *Elliptic Functions*, Springer-Verlag, 1985.
- [3] D. DUVERNEY, Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions thêta, *Acta Arith.*, 64, 1993, p. 175-188.
- [4] P. ERDÖS, On the arithmetical properties of Lambert series, *J. Indian Math. Soc.*, 12, 1948, p. 63-66.
- [5] P. ERDÖS, On the irrationality of certain series: problems and results, in *New advances in Transcendence Theory*, A. BAKER éd., Cambridge University Press, 1988.
- [6] H. EXTON, *q-Hypergeometric functions and applications*, Ellis Horwood, Chichester, 1983.
- [7] G. GASPER et M. RAHMAN, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, 1990.
- [8] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth Edition, Oxford Science Publications, 1989.

24, place du Concert, 59800 Lille, France.