Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **8** *(1996), 173–181*

A propos de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$

par Daniel DUVERNEY

1. Introduction

Le but de cet article est de généraliser certains résultats obtenus par P. Borwein dans [5] et [6], et par P. Bundschuh et K. Väänänen dans [8].

Pour tout corps de nombres K, on désignera par R l'anneau des entiers de K.

Nous démontrerons essentiellement le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ ou $K = \mathbb{Q}$. Soit $q \in K$, avec $q = \frac{r}{s}$, r, $s \in R$. On suppose que :*

$$\delta = \frac{\log|s|}{\log|r|} < \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}}\right) \tag{1}$$

Soit $x \in K^*$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$.

Alors $f(x) \notin K$. De plus, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q_0 = q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall \eta \in K, \qquad |den\ \eta| \geq q_0 \Rightarrow |f(x) - \eta| \geq |den\ \eta|^{-\omega-\varepsilon}, \tag{2}$$

où $den\,\eta$ désigne le dénominateur de η, et :

$$\omega = \frac{4 - 4\delta}{3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}} - 4\delta}. \tag{3}$$

Pour certaines valeurs particulières de x, on peut obtenir un résultat un peu meilleur (essentiellement lorsque x est une racine de l'unité). En particulier pour $x = 1$:

Manuscrit reçu le 17 novembre 1994

THÉORÈME 2. *Soit* $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ *ou* $K = \mathbb{Q}$. *Soit* $q \in K$, *avec* $q = \frac{r}{s}$, r, $s \in R$. *On suppose que :*

$$\delta = \frac{\log|s|}{\log|r|} < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\right). \tag{4}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1} \notin K$. *De plus,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists q_0 = q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\forall \eta \in K, \qquad |den\ \eta| \geq q_0 \Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1} - \eta\right| \geq |den\ \eta|^{-\omega-\varepsilon} \tag{5}$$

avec

$$\omega = \frac{3 - 3\delta}{1 - \dfrac{3}{\pi^2} - 3\delta}. \tag{6}$$

Le théorème 2 est à comparer au premier résultat d'irrationalité concernant la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1}$, obtenu par P. Erdös [10] pour q entier. Dans ce cas, la mesure d'irrationalité fournie par le théorème 2 est $\omega \approx 4{,}31012$.

On déduit également du théorème 2, par exemple, le résultat suivant : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{21^n - 2^n} \notin \mathbb{Q}$.

2. Deux lemmes techniques.

LEMME 1. *Soit* K *un corps de nombres quelconque, soit* R *l'anneau de ses entiers, et soient* $r, s \in R$, *avec* $|r| > |s| > 0$. *Alors il existe un multiple commun* H_n *dans* R *aux nombres* $r - s$, $r^2 - s^2, \ldots, r^n - s^n$, *vérifiant :*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |H_n| \leq |r|^{\frac{3}{\pi^2}n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}. \tag{7}$$

Démonstration. Soit Ψ_d le polynôme cyclotomique d'ordre d. On sait que :

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Psi_d(x).$$

Donc : $r^n - s^n = \prod_{d|n} r^{\varphi(d)} \Psi_d \left(\frac{s}{r}\right)$,

où $\varphi(d)$ désigne l'indicateur d'Euler.

Il en résulte immédiatement que le nombre H_n défini par :

$$H_n = \prod_{d=1}^{n} r^{\varphi(d)} \Psi_d \left(\frac{s}{r}\right) \tag{8}$$

est un multiple commun à $r - s$, $r^2 - s^2, \ldots, r^n - s^n$. Il reste à obtenir la majoration (7).

On sait que pour $d \geq 3$ [3] :

$$\left|\Psi_d \left(\frac{s}{r}\right)\right| \leq \exp\left(d^{\frac{c}{\log\log d}}\right) \left[1 + \left|\frac{s}{r}\right| + \cdots + \left|\frac{s}{r}\right|^{\varphi(d)}\right]$$

où c est une constante.

Donc :

$$|H_n| \leq \theta \cdot |r|^{\sum_{d=1}^n \varphi(d)} \, |r|^{\frac{1}{\log|r|} \sum_{d=3}^n d^{\frac{c}{\log\log d}}} \left(\frac{1}{1 - \left|\frac{s}{r}\right|}\right)^n,$$

où θ est une constante.

Mais on a ([11], p. 268) : $\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + 0(n \log n)$, et il est facile de voir que, $\forall \varepsilon > 0$: $\sum_{d=3}^{n} d^{\frac{c}{\log\log d}} = o(n^{1+\varepsilon})$.

Ainsi (7) est démontrée.

Remarque 1. Si $R = \mathbb{Z}$, on peut démontrer que H_n défini par (8) est le PPCM de $r - s$, $r^2 - s^2, \ldots, r^n - s^n$. Voir [4].

Remarque 2. Pour majorer $|H_n|$, on aurait pu utiliser une formule générale de M. Mignotte ([12], corollaire 1). Cette formule aurait seulement donné $\frac{3}{2} + \varepsilon$ à la place de $1 + \varepsilon$ dans (7), mais cela aurait été suffisant pour la suite.

LEMME 2. *Soit $x \in \mathbb{C}$, et $A \in \mathbb{R}$, $A > 1$. On suppose qu'il existe deux suites P_n et Q_n d'éléments de R (R anneau des entiers de K, $K = \mathbb{Q}\left[i\sqrt{d}\right]$ ou $K = \mathbb{Q}$) vérifiant :*

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{vmatrix} Q_n & P_n \\ Q_{n+1} & P_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0.$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|Q_n x - P_n| \leq A^{-\beta n^2 + o(n^2)}$, $\beta > 0$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|Q_n| \leq A^{\alpha n^2 + o(n^2)}$, $\alpha > 0$

Alors x est irrationnel.

De plus : $\forall \varepsilon > 0, \exists q_0 = q_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall \eta \in K, \qquad |den\ \eta| \geq q_0 \Rightarrow |x - \eta| \geq |den\ \eta|^{-\omega - \varepsilon},$$

avec $\omega = \dfrac{\alpha}{\beta} + 1$.

Démonstration. Elle est tout à fait analogue à celle du lemme 3 de [1] par exemple, et nous l'omettons.

3. Démonstration du théorème 1.

Nous utilisons les approximants de Padé de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$ obtenus dans [9].

En posant $u_n = q^n - 1$, il a été démontré dans [9], théorème 4, que :

$$Q_n(x) f(x) - P_n(x) = x^{2n+1} R_n(x),$$

où $R_n(x)$ est une série entière, et :

$$Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \dots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} x^p \tag{9}$$

$$\begin{aligned} P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \dots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} \\ \times \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{n+k-m}}{u_k} \end{aligned} \tag{10}$$

Dans (9) et (10), *les coefficients q-binomiaux* $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q$ sont définis par :

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q = \frac{n_q!}{p_q!(n-p)_q!},$$

avec $0_q! = 1$, $n_q! = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{q^k-1}{q-1}$ pour $n \geq 1$. Selon la formule (41) de [9], on obtient pour $|x| \leq 1$:

$$|Q_n(x)f(x) - P_n(x)| \leq C(q)\,|q|^{\frac{n(n-3)}{2}}\,|x|^{2n+1}, \tag{11}$$

où $C(q)$ ne dépend ni de x, ni de n.

Soit $\gamma > 0$.

Nous suivons la démarche de P. Borweim dans [5], et remarquons que :

$$f\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) = f(x) - \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x},$$

où $[\gamma n]$ est la partie entière de γn.

Nous reportons ceci dans (11), pour obtenir :

$$\left| Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) f(x) - Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x} - P_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \right| \leq C(q)\,|x|^{2n+1}\,|q|^{\frac{n(n-3)}{2} - [\gamma n](2n+1)} \tag{12}$$

Si nous posons $q = \dfrac{r}{s}$ et $x = \dfrac{\alpha}{\beta}$, avec $r, s, \alpha, \beta \in R$, une vérification fastidieuse mais sans difficulté montre que :

$$h_n = Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \beta^n\, r^{n[\gamma n]}\, s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n} \in R$$

$$\ell_n = \left[Q_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x} + P_n\left(\frac{x}{q^{[\gamma n]}}\right) \right] \beta^n\, r^{n[\gamma n]}\, s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n} \in R$$

où l'on a noté :

H_n = un multiple commun à $(r-s), (r^2-s^2), \ldots, (r^n-s^n)$;

L_n = un multiple commun à $(\beta r - \alpha s), (\beta r^2 - \alpha s^2), \ldots, (\beta r^{[\gamma n]} - \alpha s^{[\gamma n]})$;

$J_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (r^k - s^k)$.

(La multiplication par H_n sert à chasser les dénominateurs u_k dans l'expression (11) de $P_n(x)$; la multiplication par L_n sert à chasser les dénominateurs de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{[\gamma n]} \frac{x}{q^k - x}$; la multiplication par $s^{\frac{n(3n+1)}{2}}$ sert à chasser les dénominateurs des coefficients de Q_n et P_n ; enfin, ceci étant fait, on peut tout diviser par J_n, qui divise tous les produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(r^{k+h} - s^{k+h})$, $\forall h \in \mathbb{N}$. [7]).

On a, en vertu du lemme 1 :

$$|H_n| \leq |r|^{\frac{3}{\pi^2}n^2 + o(n^{1+\varepsilon})} \tag{13}$$

Par ailleurs, en prenant $L_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{[\gamma n]}(\beta r^k - \alpha s^k)$, on a :

$$|L_n| \leq |r|^{\frac{\gamma^2 n^2}{2} + 0(n)}. \tag{14}$$

et il est facile de vérifier que :

$$|J_n| = |r|^{\frac{n^2}{2} + 0(n)}. \tag{15}$$

On obtient ainsi, en multipliant (12) par $\beta^n\, r^{n[\gamma n]} s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n\, L_n}{J_n}$:

$$|h_n f(x) - \ell_n| \leq \frac{|s|^{(2\gamma+1)n^2 + 0(n)}}{|r|^{(-\frac{\gamma^2}{2} + \gamma - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}}.$$

D'où :

$$|h_n f(x) - \ell_n| \leq |r|^{-(-\frac{\gamma^2}{2} + (1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\varepsilon})} \tag{16}$$

Nous utilisons maintenant le lemme 2. La condition a) est vérifiée si $x \neq 0$ puisque $\begin{vmatrix} Q_n(x) & P_n(x) \\ Q_{n+1}(x) & P_{n+1}(x) \end{vmatrix} = c_n\, x^{2n+1}$ ([1], lemme 2). Les conditions b) et c) sont vérifiées en vertu de (13), (14), (15), (16), avec :

$$\alpha = \frac{\gamma^2}{2} + \gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2} \tag{17}$$

$$\beta = -\frac{\gamma^2}{2} + (1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2} \tag{18}$$

Il reste à choisir γ pour obtenir la plus petite valeur possible de $\omega = \dfrac{\alpha}{\beta} + 1$, et à vérifier que pour cette valeur γ_0 de γ on a $\beta > 0$. Avec les notations du lemme 2 :

$$\frac{1}{\omega} = 1 - \frac{\frac{\gamma^2}{2} + \gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2}}{(2\gamma+1)(1-\delta)}. \tag{19}$$

Une étude de variations montre que ω est minimum lorsque γ est égal à la racine positive de l'équation $\gamma^2 + \gamma - 1 - \dfrac{6}{\pi^2} = 0$. On choisit donc :

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}} - 1\right).$$

Dans ce cas, $\beta = -\dfrac{\gamma_0^2}{2} - \gamma_0 - 1 - \dfrac{3}{\pi^2} + (2\gamma_0+1)(1-\delta)$ sera strictement positif si :

$$\delta < \frac{-\frac{\gamma_0^2}{2} + \gamma_0 - \frac{3}{\pi^2}}{2\gamma_0 + 1},$$

et en remplaçant γ_0 par sa valeur on obtient :

$$\delta < \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}}\right).$$

Le théorème 1 est démontré.

4. Démonstration du théorème 2.

La démonstration du théorème 2 est identique à celle du théorème 1, sauf que, en supposant $0 < \gamma \leq 1$, la multiplication par L_n est inutile (si $\gamma > 1$, c'est la multiplication par H_n qui est inutile, mais les résultats sur δ sont moins bons). La majoration (16) devient :

$$|h_n\ f(1) - \ell_n| \leq |r|^{-((1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}. \tag{20}$$

Le lemme 2 s'utilise avec :

$$\alpha = \gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2} \tag{21}$$

$$\beta = (1-2\delta)\gamma - \delta - \frac{3}{\pi^2}. \tag{22}$$

La relation (19) devient :

$$\frac{1}{\omega} = 1 - \frac{\gamma + 1 + \frac{3}{\pi^2}}{(2\gamma+1)(1-\delta)}. \tag{23}$$

Le minimum de ω est atteint pour la valeur $\gamma_0 = 1$, et la condition $\beta > 0$ équivaut à :

$$\delta < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\right). \tag{24}$$

Je remercie l'arbitre pour ses suggestions et les améliorations qu'il m'a permis d'apporter à cet article.

Bibliographie

[1] K. Alladi and M.L. Robinson, *Legendre Polynomials and Irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137-155.

[2] J.M. Arnaudiès, *L'irréductibilité des polynômes cyclotomiques*, R.M.S. (Octobre 1991).

[3] P.T. Bateman, *Note on the coefficients of the cyclotomic polynomial*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1945), 1180-1181.

[4] J.P. Bézivin, *Plus petit commun multiple des termes consécutifs d'une suite récurrente linéaire*, Collect. Math. **40, 1** (1989), 1-11.

[5] P.Borwein, *On the irrationality of* $\sum(1/(q^n + r))$, J. Number Theory **37** (1991), 253-259.

[6] P.Borwein, *On the irrationality of certain series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **112** (1992), 141-146.

[7] P. Bundschuh, *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationatätsaussagen*, Inventiones Math. **9** (1970), 175-184.

[8] P. Bundschuh and K. Väänänen, *Arithmetical Investigations of a certain infinite product*, Compositio Math. **91** (1994), 175-201.

[9] D. Duverney, *Approximants de Padé et U-dérivation*, Bull. Soc. Math. France **122** (1994), 553-570.

[10] P. Erdös, *On arithmetical properties of Lambert Series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **12** (1948), 63-66.

[11] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Fifth Edition (1979).

[12] M. Mignotte, *An Inequality about Irreducible Factors of Integer Polynomials*, J. Number Theory **30** (1988), 156-166.

Daniel Duverney
24, Place du Concert
59800 Lille