Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, p. 1-4, 1995

Théorie des nombres/*Number Theory*

Sur l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$

Daniel DUVERNEY

Résumé – Soit $q \in \mathbf{Z}$, $|q| \geqq 2$, et soit $r = b/a \in \mathbf{Q}^*$. Nous démontrons, sous certaines conditions, l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$.

On the irrationality of $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$

Abstract – *Let $q \in \mathbf{Z}$, $|q| \geqq 2$, and let $r = b/a \in \mathbf{Q}^*$. We prove, under some assumptions, the irrationality of $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$.*

L'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(q^n - 1)$ a été établie par P. Erdös dans [4] pour $q \in \mathbf{N}$, $q \geqq 2$. Plus récemment, P. Borwein a démontré l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(q^n - r)$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n/(q^n - r)$ pour $q \in \mathbf{Z}$, $|q| \geqq 2$, et $r \in \mathbf{Q}^*$ [2]. Dans cette Note, nous démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME. – *Soient $q \in \mathbf{Z}$, $|q| \geqq 2$, et $r = b/a \in \mathbf{Q}^*$, $|r| < |q|$. Posons $u_n = aq^n - b$, et soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres premiers divisant l'un des u_n ($n \geqq 0$). Pour toute partie finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$, soit :*

$$d(\mathbf{F}) = \prod_{p \in \mathbf{F}} p^{1/(p-1)}.$$

Supposons qu'il existe une partie finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$, telle que $|b|^2/|q|\, d(\mathbf{F}) < 1$.

Alors $f_q(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$ est irrationnel.

Démonstration. – Posons $U = \{u_1, u_2, ..., u_n, ...\}$ et, avec les notations de [3], $L_U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n/u_n$. Il a été démontré dans [3], théorème 4, que

$$Q_n(x)\, L_U(x) - P_n(x) = x^{2n+1} R_n(x) \tag{1}$$

avec

$$Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \dots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} x^p \tag{2}$$

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/95/03200001 $ 2.00

$$(3) \qquad P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m}\, u_{n+m}\, u_{n+m-1} \ldots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \times q^{(n-m)(n-m-1)/2} \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{n+k-m}}{u_k}$$

De plus, si $|a/b| \geqq 1$, ce que nous supposons pour l'instant, on a ([3], formule (42)), pour $|x| \leqq 1$:

$$(4) \qquad |R_n(x)| \leqq \frac{l(q)}{|aq| - |b|} |q|^{n(n-3)/2} |b|^n$$

où $l(q)$ ne dépend ni de x, ni de n.

En notant ∂_U la U-dérivation ([3], § 2), on a $\partial_U L_U(x) = 1/(1-x)$, donc en vertu de la formule (17) de [3]:

$$(5) \qquad a\, L_U(x) = \frac{x}{q-x} + b\, L_U\left(\frac{x}{q}\right),$$

si bien que, pour tout entier n non nul:

$$L_U\left(\frac{x}{q^n}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{x}{q^{n-k} - x} + \frac{a^n}{b^n} L_U(x).$$

Pour $x = r = b/a$, nous obtenons:

$$(6) \qquad L_U\left(\frac{b}{aq^n}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^k} \frac{1}{aq^{n-k} - b} + \frac{a^n}{b^n} L_U\left(\frac{b}{a}\right).$$

La proposition 2 de [3] et le lemme 2 de [1] permettent d'affirmer que, pour tout réel x non nul et tout entier naturel n, l'un au moins des nombres $R_n(x)$ et $R_{n+1}(x)$ est différent de zéro. Si nous remplaçons x par b/aq^n dans (1) et utilisons la majoration (4) et l'égalité (6), nous obtenons donc pour une infinité de valeurs de n l'encadrement suivant:

$$(7) \qquad 0 < \left| Q_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \frac{a^n}{b^n} L_U\left(\frac{b}{a}\right) - Q_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{1}{aq^{n-k} - b} - P_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \right| \leqq \frac{l(q)}{|aq| - |b|} \left(\frac{|b|}{|a|\,|q|^n}\right)^{2n+1} |q|^{n(n-3)/2} |b|^n.$$

Pour toute partie finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$ et n assez grand, soit $D_n(\mathbf{F}) = \prod_{p \in \mathbf{F}} p^{[n/(p-1)]-1}$. Alors, pour tout $k \geqq 0$, $D_n(\mathbf{F})$ divise $u_{k+1}\, u_{k+2} \ldots u_{k+n}$ en vertu du petit théorème de Fermat, et $\prod_{k=1}^{n} (aq^k - b)/D_n(\mathbf{F})$ est multiple commun à $aq - b$, $aq^2 - b, \ldots, aq^n - b$. Si nous multiplions l'encadrement (7) par:

$$T_n = \left| \prod_{k=1}^{n} (aq^k - b) \right| |q|^{n^2} |a|^n |b|^n / [D_n(\mathbf{F})]^2,$$

nous obtenons donc :

$$0 < \left|\alpha_n\, L_U\left(\frac{b}{a}\right) - \beta_n\right| < C.\, \frac{|b|^{4\,n} \left|\prod_{k=1}^{n} (aq^k - b)\right|}{[D_n\,(\mathbf{F})]^2\, |a|^n\, |q|^{n\,(n+5)/2}}$$

avec $\alpha_n \in \mathbf{Z}$, $\beta_n \in \mathbf{Z}$, et C ne dépendant pas de n.

Or : $\left|\prod_{k=1}^{n} (aq^k - b)\right| \leqq \gamma\, |a|^n\, |q|^{n\,(n+1)/2}$ où γ ne dépend pas de n.

Donc : $0 < |\alpha_n\, L_U\,(b/a) - \beta_n| < K\,(|b|^2/(d\,(\mathbf{F})\,|q|\,))^{2\,n}$, ce qui démontre le théorème pour $|a/b| \geqq 1$. Si $|a/b| < 1$, on a $|aq/b| > 1$. D'après (6), il suffit de prouver que $L_U\,(b/aq) \notin \mathbf{Q}$. Mais ceci est vrai car, d'après ce qui précède, $L_V\,(b/aq) \notin \mathbf{Q}$, avec $v_n = aq^{n+1} - b$, et $L_V\,(b/aq) = (aq/b)\, L_U\,(b/aq) - (1/(aq - b))$. La démonstration du théorème est donc complète.

Nous énonçons deux corollaires immédiats.

Corollaire 1. – *Soient $r \in \mathbf{Z} - \{0\}$ et $q \in \mathbf{Z}$, $|q| \geqq 2$. Si $r^2 \leqq |q|$, alors $f_q\,(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$ est irrationnel.*

On a en effet $d\,(\mathbf{F}) > 1$ pour toute partie finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$.

Corollaire 2. – *Soient $r \in \mathbf{Z} - \{0\}$ et $q \in \mathbf{Z}$, $|q| \geqq 3$, r et q impairs. Si $r^2 \leqq 2\,|q|$, alors $f_q\,(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$ est irrationnel.*

Dans ce cas, en effet, $2 \in \mathbf{P}$, donc $d\,(\mathbf{F}) > 2$ pour toute partie finie $\mathbf{F}$ de $\mathbf{P}$ contenant 2 et un autre élément.

Lorsque q et r sont donnés *numériquement*, le théorème ci-dessus permet d'étudier l'irrationalité de $f_q\,(r)$.

Exemples. – *a)* $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n/(3^n - 2)$ est irrationnel. En effet, 5 divise $3^3 - 2$, et $4 < 3.5^{1/4}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n/(4^n - 3)$ est irrationnel; on observe que 11, 13, 23, 37, 47 et 59 divisent respectivement $4^4 - 3, 4^2 - 3, 4^4 - 3, 4^{13} - 3$, $4^{21} - 3, 4^{25} - 3$. Pour $F = \{11, 13, 23, 37, 47, 59\}$ on a $4.d\,(\mathbf{F}) > 9$, et le théorème s'applique.

Pour obtenir d'autres résultats d'irrationalité sur $f_q\,(r)$, nous remarquons que, en vertu du théorème, *$f_q\,(r)$ est irrationnel si le produit infini $\prod_{p\in\mathbf{P}} p^{1/(p-1)}$ diverge.* Cela sera notamment le cas si la *densité* de $\mathbf{P}$ est strictement positive, puisque dans ce cas la série $\sum_{p\in\mathbf{P}} 1/p$ diverge. Mais pour les suites de la forme $aq^n + b$, on ne connaît guère de résultats définitifs sur la densité de $\mathbf{P}$ que dans le cas $|a| = |b| = 1$ [7], ce qui n'amène pas de résultats nouveaux par rapport à [2]. Cependant, le problème de la densité de $\mathbf{P}$ est aussi lié à la *conjecture d'Artin.* On ne sait malheureusement pas démontrer, pour l'instant, que l'ensemble des nombres premiers p pour lesquels $q \neq -1$, non carré parfait, est une racine primitive modulo p a une densité strictement positive (sauf sous des hypothèses supplémentaires, voir [6] et [8]). Un travail relativement récent de D. R. Heath-Brown [5] sur la conjecture d'Artin permet toutefois d'obtenir des énoncés dans le cas qui nous occupe. Convenons de dire que f_q est *irrationnelle* si $f_q(r)$ est irrationnel pour tout rationnel non nul r, $|r| < |q|$.

COROLLAIRE 3. – *La fonction f_q est irrationnelle pour tous les nombres premiers q, sauf éventuellement pour deux d'entre eux.*

Démonstration. – En vertu du corollaire 2 de [5], étant donnés trois nombres premiers distincts q_1, q_2, q_3, il existe $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$ tel que le nombre $N(n)$ de nombres premiers $p \leqq n$ pour lesquels q est une racine primitive modulo p vérifie $N(n) \geqq cn(\log n)^{-2}$, où c est une constante. Tous ces nombres premiers appartiennent à **P** pour tous les couples (a, b). Or, par des arguments classiques, l'inégalité $N(n) \geqq cn(\log n)^{-2}$ entraîne la divergence de la série $\sum_{p \in \mathbf{P}} 1/p$, donc $f_q(r)$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbf{Q}^*$, $|r| < |q|$, et le corollaire 3 est démontré.

Note remise le 24 juin 1994, acceptée après révision le 12 octobre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] K. ALLADI et M. L. ROBINSON, Legendre polynomials and irrationality, *J. reine angew. Math.*, 318, 1980, p. 137-155.

[2] P. BORWEIN, On the irrationality of certain series, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 112, 1992, p. 141-146.

[3] D. DUVERNEY, Approximants de Padé et *U*-dérivation, *Bull. Soc. Math. France*, 122, 1994, p. 101-118.

[4] P. ERDÖS, On arithmetical properties of Lambert series, *J. Indian Math. Soc.*, (NS), 12, 1948, p. 63-66.

[5] H. R. HEATH-BROWN, Artin's conjecture for primitive roots, *Quart. J. Math. Oxford*, (2), 37, 1986, p. 27-38.

[6] C. HOOLEY, On Artin's conjecture, *J. reine angew. Math.*, 225, 1967, p. 209-220.

[7] J. C. LAGARIAS, The set of primes dividing the Lucas numbers has density 2/3, *Pacific J. Math.*, 118, 2, 1985, p. 449-461.

[8] H. W. LENSTRA Jr, On Artin's conjecture and Euclid's algorithm in global fields, *Invent. Math.*, 42, 1977, p. 201-224.

24, place du Concert, 59800 Lille, France.