

Comptes rendus de  
l'Académie des sciences.  
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1995-01-05.

**1/** Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

**2/** Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

**3/** Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

**4/** Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

**5/** Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

**6/** L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

**7/** Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter [utilisation.commerciale@bnf.fr](mailto:utilisation.commerciale@bnf.fr).

Théorie des nombres/Number Theory

## Sur l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n / (q^n - r)$

Daniel DUVERNEY

*Résumé* – Soit  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $|q| \geq 2$ , et soit  $r = b/a \in \mathbf{Q}^*$ . Nous démontrons, sous certaines conditions, l'irrationalité de  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n / (q^n - r)$ .

### On the irrationality of $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n / (q^n - r)$

*Abstract* – Let  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $|q| \geq 2$ , and let  $r = b/a \in \mathbf{Q}^*$ . We prove, under some assumptions, the irrationality of  $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n / (q^n - r)$ .

L'irrationalité de  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 / (q^n - 1)$  a été établie par P. Erdős dans [4] pour  $q \in \mathbf{N}$ ,  $q \geq 2$ . Plus récemment, P. Borwein a démontré l'irrationalité de  $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 / (q^n - r)$  et de  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n / (q^n - r)$  pour  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $|q| \geq 2$ , et  $r \in \mathbf{Q}^*$  [2]. Dans cette Note, nous démontrons le résultat suivant :

**THÉORÈME.** – Soient  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $|q| \geq 2$ , et  $r = b/a \in \mathbf{Q}^*$ ,  $|r| < |q|$ . Posons  $u_n = aq^n - b$ , et soit  $\mathbf{P}$  l'ensemble des nombres premiers divisant l'un des  $u_n$  ( $n \geq 0$ ). Pour toute partie finie  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}$ , soit :

$$d(\mathbf{F}) = \prod_{p \in \mathbf{F}} p^{1/(p-1)}.$$

Supposons qu'il existe une partie finie  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}$ , telle que  $|b|^2 / |q| d(\mathbf{F}) < 1$ .

Alors  $f_q(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n / (q^n - r)$  est irrationnel.

*Démonstration.* – Posons  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  et, avec les notations de [3],  $L_U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n / u_n$ . Il a été démontré dans [3], théorème 4, que

$$(1) \quad Q_n(x) L_U(x) - P_n(x) = x^{2n+1} R_n(x)$$

avec

$$(2) \quad Q_n(x) = \sum_{p=0}^n (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \dots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} x^p$$

\_\_\_\_\_  
Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

$$(3) \quad P_n(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \dots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \\ \times q^{(n-m)(n-m-1)/2} \sum_{k=1}^m \frac{x^{n+k-m}}{u_k}$$

De plus, si  $|a/b| \geq 1$ , ce que nous supposons pour l'instant, on a ([3], formule (42)), pour  $|x| \leq 1$  :

$$(4) \quad |R_n(x)| \leq \frac{l(q)}{|aq| - |b|} |q|^{n(n-3)/2} |b|^n$$

où  $l(q)$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $n$ .

En notant  $\partial_U$  la  $U$ -dérivation ([3], § 2), on a  $\partial_U L_U(x) = 1/(1-x)$ , donc en vertu de la formule (17) de [3]:

$$(5) \quad a L_U(x) = \frac{x}{q-x} + b L_U\left(\frac{x}{q}\right),$$

si bien que, pour tout entier  $n$  non nul:

$$L_U\left(\frac{x}{q^n}\right) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{x}{q^{n-k} - x} + \frac{a^n}{b^n} L_U(x).$$

Pour  $x = r = b/a$ , nous obtenons:

$$(6) \quad L_U\left(\frac{b}{aq^n}\right) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^k} \frac{1}{aq^{n-k} - b} + \frac{a^n}{b^n} L_U\left(\frac{b}{a}\right).$$

La proposition 2 de [3] et le lemme 2 de [1] permettent d'affirmer que, pour tout réel  $x$  non nul et tout entier naturel  $n$ , l'un au moins des nombres  $R_n(x)$  et  $R_{n+1}(x)$  est différent de zéro. Si nous remplaçons  $x$  par  $b/aq^n$  dans (1) et utilisons la majoration (4) et l'égalité (6), nous obtenons donc pour une infinité de valeurs de  $n$  l'encadrement suivant:

$$(7) \quad 0 < \left| Q_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \frac{a^n}{b^n} L_U\left(\frac{b}{a}\right) \right. \\ \left. - Q_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{1}{aq^{n-k} - b} - P_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \right| \\ \leq \frac{l(q)}{|aq| - |b|} \left(\frac{|b|}{|a||q|^n}\right)^{2n+1} |q|^{n(n-3)/2} |b|^n.$$

Pour toute partie finie  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}$  et  $n$  assez grand, soit  $D_n(\mathbf{F}) = \prod_{p \in \mathbf{F}} p^{[n/(p-1)]-1}$ . Alors, pour tout  $k \geq 0$ ,  $D_n(\mathbf{F})$  divise  $u_{k+1} u_{k+2} \dots u_{k+n}$  en vertu du petit théorème de Fermat, et  $\prod_{k=1}^n (aq^k - b)/D_n(\mathbf{F})$  est multiple commun à  $aq - b, aq^2 - b, \dots, aq^n - b$ . Si nous multiplions l'encadrement (7) par:

$$T_n = \left| \prod_{k=1}^n (aq^k - b) \right| |q|^{n^2} |a|^n |b|^n / [D_n(\mathbf{F})]^2,$$

nous obtenons donc :

$$0 < \left| \alpha_n L_U \left( \frac{b}{a} \right) - \beta_n \right| < C \cdot \frac{|b|^{4n} \left| \prod_{k=1}^n (aq^k - b) \right|}{[D_n(\mathbf{F})]^2 |a|^n |q|^{n(n+5)/2}}$$

avec  $\alpha_n \in \mathbf{Z}$ ,  $\beta_n \in \mathbf{Z}$ , et  $C$  ne dépendant pas de  $n$ .

Or :  $\left| \prod_{k=1}^n (aq^k - b) \right| \leq \gamma |a|^n |q|^{n(n+1)/2}$  où  $\gamma$  ne dépend pas de  $n$ .

Donc :  $0 < |\alpha_n L_U(b/a) - \beta_n| < K (|b|^2/(d(\mathbf{F})|q|))^{2n}$ , ce qui démontre le théorème pour  $|a/b| \geq 1$ . Si  $|a/b| < 1$ , on a  $|aq/b| > 1$ . D'après (6), il suffit de prouver que  $L_U(b/aq) \notin \mathbf{Q}$ . Mais ceci est vrai car, d'après ce qui précède,  $L_V(b/aq) \notin \mathbf{Q}$ , avec  $v_n = aq^{n+1} - b$ , et  $L_V(b/aq) = (aq/b) L_U(b/aq) - (1/(aq - b))$ . La démonstration du théorème est donc complète.

Nous énonçons deux corollaires immédiats.

COROLLAIRE 1. - Soient  $r \in \mathbf{Z} - \{0\}$  et  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $|q| \geq 2$ . Si  $r^2 \leq |q|$ , alors  $f_q(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$  est irrationnel.

On a en effet  $d(\mathbf{F}) > 1$  pour toute partie finie  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}$ .

COROLLAIRE 2. - Soient  $r \in \mathbf{Z} - \{0\}$  et  $q \in \mathbf{Z}$ ,  $|q| \geq 3$ ,  $r$  et  $q$  impairs. Si  $r^2 \leq 2|q|$ , alors  $f_q(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n/(q^n - r)$  est irrationnel.

Dans ce cas, en effet,  $2 \in \mathbf{P}$ , donc  $d(\mathbf{F}) > 2$  pour toute partie finie  $\mathbf{F}$  de  $\mathbf{P}$  contenant 2 et un autre élément.

Lorsque  $q$  et  $r$  sont donnés numériquement, le théorème ci-dessus permet d'étudier l'irrationalité de  $f_q(r)$ .

Exemples. - a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n/(3^n - 2)$  est irrationnel. En effet, 5 divise  $3^3 - 2$ , et  $4 < 3.5^{1/4}$ .

b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n/(4^n - 3)$  est irrationnel; on observe que 11, 13, 23, 37, 47 et 59 divisent respectivement  $4^4 - 3$ ,  $4^2 - 3$ ,  $4^4 - 3$ ,  $4^{13} - 3$ ,  $4^{21} - 3$ ,  $4^{25} - 3$ . Pour  $F = \{11, 13, 23, 37, 47, 59\}$  on a  $4.d(\mathbf{F}) > 9$ , et le théorème s'applique.

Pour obtenir d'autres résultats d'irrationalité sur  $f_q(r)$ , nous remarquons que, en vertu du théorème,  $f_q(r)$  est irrationnel si le produit infini  $\prod_{p \in \mathbf{P}} p^{1/(p-1)}$  diverge. Cela sera

notamment le cas si la densité de  $\mathbf{P}$  est strictement positive, puisque dans ce cas la série  $\sum_{p \in \mathbf{P}} 1/p$  diverge. Mais pour les suites de la forme  $aq^n + b$ , on ne connaît guère de résultats

définitifs sur la densité de  $\mathbf{P}$  que dans le cas  $|a| = |b| = 1$  [7], ce qui n'amène pas de résultats nouveaux par rapport à [2]. Cependant, le problème de la densité de  $\mathbf{P}$  est aussi lié à la conjecture d'Artin. On ne sait malheureusement pas démontrer, pour l'instant, que l'ensemble des nombres premiers  $p$  pour lesquels  $q \neq -1$ , non carré parfait, est une racine primitive modulo  $p$  a une densité strictement positive (sauf sous des hypothèses supplémentaires, voir [6] et [8]). Un travail relativement récent de D. R. Heath-Brown [5] sur la conjecture d'Artin permet toutefois d'obtenir des énoncés dans le cas qui nous

occupe. Convenons de dire que  $f_q$  est *irrationnelle* si  $f_q(r)$  est irrationnel pour tout rationnel non nul  $r$ ,  $|r| < |q|$ .

COROLLAIRE 3. – *La fonction  $f_q$  est irrationnelle pour tous les nombres premiers  $q$ , sauf éventuellement pour deux d'entre eux.*

*Démonstration.* – En vertu du corollaire 2 de [5], étant donnés trois nombres premiers distincts  $q_1, q_2, q_3$ , il existe  $q \in \{q_1, q_2, q_3\}$  tel que le nombre  $N(n)$  de nombres premiers  $p \leq n$  pour lesquels  $q$  est une racine primitive modulo  $p$  vérifie  $N(n) \geq cn(\log n)^{-2}$ , où  $c$  est une constante. Tous ces nombres premiers appartiennent à  $\mathbf{P}$  pour tous les couples  $(a, b)$ . Or, par des arguments classiques, l'inégalité  $N(n) \geq cn(\log n)^{-2}$  entraîne la divergence de la série  $\sum_{p \in \mathbf{P}} 1/p$ , donc  $f_q(r)$  est irrationnel pour tout  $r \in \mathbf{Q}^*$ ,  $|r| < |q|$ , et le corollaire 3 est démontré.

Note remise le 24 juin 1994, acceptée après révision le 12 octobre 1994.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] K. ALLADI et M. L. ROBINSON, Legendre polynomials and irrationality, *J. reine angew. Math.*, 318, 1980, p. 137-155.
- [2] P. BORWEIN, On the irrationality of certain series, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 112, 1992, p. 141-146.
- [3] D. DUVERNEY, Approximants de Padé et  $U$ -dérivation, *Bull. Soc. Math. France*, 122, 1994, p. 101-118.
- [4] P. ERDÖS, On arithmetical properties of Lambert series, *J. Indian Math. Soc.*, (NS), 12, 1948, p. 63-66.
- [5] H. R. HEATH-BROWN, Artin's conjecture for primitive roots, *Quart. J. Math. Oxford*, (2), 37, 1986, p. 27-38.
- [6] C. HOOLEY, On Artin's conjecture, *J. reine angew. Math.*, 225, 1967, p. 209-220.
- [7] J. C. LAGARIAS, The set of primes dividing the Lucas numbers has density  $2/3$ , *Pacific J. Math.*, 118, 2, 1985, p. 449-461.
- [8] H. W. LENSTRA Jr, On Artin's conjecture and Euclid's algorithm in global fields, *Invent. Math.*, 42, 1977, p. 201-224.

24, place du Concert, 59800 Lille, France.