# Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

Théorie des nombres/*Number Theory*

# Une propriété arithmétique du nombre $p$-adique $\sum_{n=0}^{+\infty} a(n)\, p^{mn^2}$

Daniel DUVERNEY

***Résumé*** — Soit $p \in \mathbb{N}$, $p$ premier. On conjecture [1] que le nombre $p$-adique $x_p = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n^2}$ est transcendant. Dans cette Note, nous démontrons un théorème qui permet de conclure que $x_p$ est non quadratique. La méthode utilisée est celle de [2], c'est-à-dire exploite le fait que la suite $\rho(n)$ comptant le nombre de décompositions de $n$ en somme des carrés de deux entiers positifs contient « beaucoup de zéros » (*voir* le lemme ci-dessous). On ne peut donc espérer démontrer la transcendance de $x_p$ par ce moyen.

## An arithmetic property of the $p$-adic number $\sum_{n=0}^{+\infty} a(n)\, p^{mn^2}$

***Abstract*** — *Let $p \in \mathbf{N}$ be a prime. One conjectures* [1] *that the p-adic number $x_p = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n^2}$ is transcendental. In this Note, we prove a theorem which implies that $x_p$ is non quadratic. We use the same method as in* [2], *based on the fact that the sequence $\rho(n)$ which represents the number of decompositions of n as a sum of the squares of two positive integers contains "many zeroes"* (see *the lemma below*). *Thus this method cannot be used to prove the transcendence of $x_p$.*

Nous démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit $p \in \mathbf{N}$, p premier. Soit $m \in \mathbf{N} - \{0\}$. Soit $\{a(n)\}_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$, avec :*

*a)* $a(n) \neq 0$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$

*b)* $|a(n)| \leqq \mathrm{M}$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

*Soit* $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)\, p^{mn^2} \in \mathbf{Q}_p$.

*Alors pour tout* $\mathrm{P} \in \mathbf{Q}[\mathrm{X}]$, $\deg \mathrm{P} \leqq 2$, $\mathrm{P} \neq 0$, *on a :* $\mathrm{P}(y) \neq 0$.

*Démonstration.* — Posons $q = p^m$, et écrivons :

$$(1) \qquad y = \sum_{n=0}^{+\infty} l(n)\, q^n \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{ll} l(n) = a(k) \ \text{si}\ n = k^2, & k \in \mathbf{N} \\ l(n) = 0 \ \text{sinon.} & \end{array} \right.$$

Alors :

$$(2) \qquad y^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_a(n)\, q^n,$$

avec :

$$\rho_a(n) = \sum_{k=0}^{n} l(k)\, l(n-k).$$

Il résulte de l'hypothèse *b)* du théorème que $|\rho_a(n)| \leqq \mathrm{M}^2 \rho(n)$, où $\rho(n)$ désigne le nombre de décompositions $n = \alpha^2 + \beta^2$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^2$. La démonstration du lemme suivant est

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/93/03170013 $ 2.00 

tout fait analogue à celle du lemme 2 de [2], et nous l'omettons :

LEMME. — *Soit* $\delta \in \mathbf{N}-\{0\}$, *et soit* $h \in ]0, 1[$. *On désigne par* $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ *la suite des nombres premiers de* $\mathbf{N}$ *congrus à* 3 *modulo* 4, *consécutifs,* $p_1$ *étant choisi de façon que :*

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^{-2} \leqq \frac{h}{2}.$$

*Alors il existe un entier* $m_0 = m_0(h, \delta)$ *et une constante* L (*constante de Linnik* [3]) *tels que, pour tout* $k = k(m) = p_1 p_2 \ldots p_m$, $m \geqq m_0$, *il existe* $(n_k, n'_k) \in \mathbf{N}^2$ *vérifiant :*

*a)* $\rho(n_k + i) = 0$, *pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n'_k + \delta + 1\} - \{n'_k + 1\}$,
*b)* $\rho(n_k + n'_k + 1) = 2$,
*c)* $l(n_k + i) = 0$, *pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n'_k + \delta + 1\}$,
*d)* $n_k \leqq 4^{\mathrm{L}} \exp(4 \mathrm{L} p_{2[hk]})$,
*e)* $k \leqq n'_k$.

Démontrons maintenant que $y$ est non quadratique. Supposons qu'il existe A, B, C $\in \mathbf{Z}$, avec $\mathrm{A} \neq 0$, tels que $\mathrm{A} y^2 + \mathrm{B} y + \mathrm{C} = 0$. Alors :

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{A} \rho_a(n) + \mathrm{B}\, l(n))\, q^n + \mathrm{C} = 0.$$

Dans le lemme, nous choisissons $h \in ]0, 1[$ tel que :

$$(5) \qquad 64 \mathrm{L} h < \log q,$$

et $\delta \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que, pour tout $(u, v) \in \mathbf{N}^2$, $q^{\delta+1}$ ne divise pas $2 \mathrm{A}\, a(u)\, a(v)$ dans $\mathbf{Z}$ [ceci est possible en vertu des hypothèses *a*) et *b*) du théorème].

Si nous introduisons la suite $n_k$ dans (4), nous obtenons grâce à *a*) du lemme :

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{n_k} (\mathrm{A} \rho_a(n) + \mathrm{B}\, l(n))\, q^n + \mathrm{C} = - \sum_{n=n_k+n'_k+1}^{+\infty} (\mathrm{A} \rho_a(n) + \mathrm{B}\, l(n))\, q^n.$$

On a :

$$(7) \qquad \mathrm{v}_p \left[ - \sum_{n=n_k+n'_k+1}^{+\infty} (\mathrm{A} \rho_a(n) + \mathrm{B}\, l(n))\, q^n \right] \geqq m(n_k + k + 1).$$

Par ailleurs, soit $g_k = \sum_{n=0}^{n_k} (\mathrm{A} \rho_a(n) + \mathrm{B}\, l(n))\, q^n + \mathrm{C}$; alors $g_k \in \mathbf{Z}$, et on peut le majorer en valeur absolue :

$$|g_k| \leqq \sum_{n=0}^{n_k} (|\mathrm{A}|\, \mathrm{M}^2 \rho(n) + |\mathrm{B}|\, \mathrm{M})\, q^n + |\mathrm{C}|.$$

Or on sait ([4], p. 262, th. 317, et § 18-7, p. 270) que

$$\rho(n) \leqq \exp \frac{\log n}{\log \log n},$$

donc :

$$|g_k| \leqq (|\mathrm{A}|\, \mathrm{M}^2 + |\mathrm{B}|\, \mathrm{M}) \exp \frac{\log n_k}{\log \log n_k} . \frac{q^{n_k+1}}{q-1} + |\mathrm{C}|.$$

Donc il existe $K \in ]0, +\infty[$ tel que, pour $k$ assez grand :

$$|g_k| \leqq q^{n_k + (1/\log q)(\log n_k / \log\log n_k) + K}. \tag{8}$$

Supposons $g_k \neq 0$. On déduit de (8) que :

$$v_p(g_k) \leqq m\left(n_k + \frac{1}{\log q}\,\frac{\log n_k}{\log\log n_k} + K\right). \tag{9}$$

Mais si nous utilisons le théorème des nombres premiers dans la suite arithmétique $4n+3$, nous obtenons pour $k$ assez grand :

$$\frac{1}{4}\,\frac{p_{2\,[hk]}}{\log p_{2\,[hk]}} \leqq 2hk \leqq \frac{p_{2\,[hk]}}{\log p_{2\,[hk]}} \tag{10}$$

et par suite, en vertu de $d$) du lemme :

$$\frac{\log n_k}{\log\log n_k} \leqq \frac{\log 4^L + 4 L p_{2\,[hk]}}{\log(\log 4^L + 4 L p_{2\,[hk]})} \leqq 64 L hk \qquad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

En reportant ce résultat dans (9), on obtient :

$$v_p(g_k) \leqq m\left(n_k + \frac{64 h L}{\log q} k + K\right).$$

Grâce au choix de $h$, cette inégalité contredit (6) et (7) pour $k$ assez grand. Donc $g_k = g_{k(m)} = 0$ pour $m$ assez grand, et on obtient alors :

$$0 = g_{k(m+1)} - g_{k(m)} = \sum_{n=n_{k(m)}+1}^{n_{k(m+1)}} (A\rho_a(n) + B\,l(n))\,q^n.$$

En utilisant $a$), $b$), $c$) du lemme, il vient, pour un entier $r$ compris entre 1 et $n_k + n'_k$ :

$$2A\,a(r)\,a(n_k + n'_k + 1 - r) + \sum_{n=n_{k(m)}+n'_{k(m)}+\delta+2}^{n_{k(m+1)}} (A\rho_a(n) + B\,l(n))\,q^{n - n_{k(m)} - n'_{k(m)} - 1} = 0.$$

Donc $q^{\delta+1}$ divise $2A\,a(r)\,a(n_k + n'_k + 1 - r)$, ce qui contredit le choix de $\delta$, et achève la démonstration.

Je remercie M. J.-P. Bézivin, professeur à l'Université de Caen, pour ses suggestions à partir d'une première version de ce travail.

Note remise le 29 mars 1993, acceptée après révision le 14 mai 1993.

Références bibliographiques

[1] P. Bundschuh, Quelques résultats arithmétiques sur les fonctions thêta de Jacobi, in *Groupe d'Étude sur les problèmes diophantiens*, 1983-84, Publ. Math. Univ. Pierre-et-Marie-Curie n° 64, fasc. 1.

[2] D. Duverney, Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions thêta, *Acta Arith.* (à paraître).

[3] S. Graham, On Linnik's constant, *Acta Arith.*, 39, 1981, p. 163-179.

[4] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the theory of numbers*, Oxford Sci. Publ., 1989.

24, *place du Concert*, 59800 *Lille, France.*