

Comptes rendus de
l'Académie des sciences.
Série 1, Mathématique

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1993-07.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

Une propriété arithmétique du nombre p -adique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a(n) p^{mn^2}$$

Daniel DUVERNEY

Résumé — Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier. On conjecture [1] que le nombre p -adique $x_p = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n^2}$ est transcendant. Dans cette Note, nous démontrons un théorème qui permet de conclure que x_p est non quadratique. La méthode utilisée est celle de [2], c'est-à-dire exploite le fait que la suite $\rho(n)$ comptant le nombre de décompositions de n en somme des carrés de deux entiers positifs contient « beaucoup de zéros » (voir le lemme ci-dessous). On ne peut donc espérer démontrer la transcendance de x_p par ce moyen.

An arithmetic property of the p -adic number $\sum_{n=0}^{+\infty} a(n) p^{mn^2}$

Abstract — Let $p \in \mathbb{N}$ be a prime. One conjectures [1] that the p -adic number $x_p = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n^2}$ is transcendental. In this Note, we prove a theorem which implies that x_p is non quadratic. We use the same method as in [2], based on the fact that the sequence $\rho(n)$ which represents the number of decompositions of n as a sum of the squares of two positive integers contains "many zeroes" (see the lemma below). Thus this method cannot be used to prove the transcendence of x_p .

Nous démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME. — Soit $p \in \mathbb{N}$, p premier. Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit $\{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, avec :

a) $a(n) \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $|a(n)| \leq M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n) p^{mn^2} \in \mathbb{Q}_p$.

Alors pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg P \leq 2$, $P \neq 0$, on a : $P(y) \neq 0$.

Démonstration. — Posons $q = p^m$, et écrivons :

$$(1) \quad y = \sum_{n=0}^{+\infty} l(n) q^n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} l(n) = a(k) & \text{si } n = k^2, & k \in \mathbb{N} \\ l(n) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors :

$$(2) \quad y^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_a(n) q^n,$$

avec :

$$\rho_a(n) = \sum_{k=0}^n l(k) l(n-k).$$

Il résulte de l'hypothèse b) du théorème que $|\rho_a(n)| \leq M^2 \rho(n)$, où $\rho(n)$ désigne le nombre de décompositions $n = \alpha^2 + \beta^2$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. La démonstration du lemme suivant est

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

tout fait analogue à celle du lemme 2 de [2], et nous l'omettons :

LEMME. — Soit $\delta \in \mathbb{N} - \{0\}$, et soit $h \in]0, 1[$. On désigne par $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ la suite des nombres premiers de \mathbb{N} congrus à 3 modulo 4, consécutifs, p_1 étant choisi de façon que :

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n^{-2} \leq \frac{h}{2}.$$

Alors il existe un entier $m_0 = m_0(h, \delta)$ et une constante L (constante de Linnik [3]) tels que, pour tout $k = k(m) = p_1 p_2 \dots p_m$, $m \geq m_0$, il existe $(n_k, n'_k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant :

- a) $\rho(n_k + i) = 0$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n'_k + \delta + 1\} - \{n'_k + 1\}$,
- b) $\rho(n_k + n'_k + 1) = 2$,
- c) $l(n_k + i) = 0$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n'_k + \delta + 1\}$,
- d) $n_k \leq 4^L \exp(4L p_{2 \lfloor hk \rfloor})$,
- e) $k \leq n'_k$.

Démontrons maintenant que y est non quadratique. Supposons qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{Z}$, avec $A \neq 0$, tels que $Ay^2 + By + C = 0$. Alors :

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^n + C = 0.$$

Dans le lemme, nous choisissons $h \in]0, 1[$ tel que :

$$(5) \quad 64 L h < \log q,$$

et $\delta \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{N}^2$, $q^{\delta+1}$ ne divise pas $2A a(u) a(v)$ dans \mathbb{Z} [ceci est possible en vertu des hypothèses a) et b) du théorème].

Si nous introduisons la suite n_k dans (4), nous obtenons grâce à a) du lemme :

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{n_k} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^n + C = - \sum_{n=n_k+n'_k+1}^{+\infty} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^n.$$

On a :

$$(7) \quad v_p \left[- \sum_{n=n_k+n'_k+1}^{+\infty} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^n \right] \geq m(n_k + k + 1).$$

Par ailleurs, soit $g_k = \sum_{n=0}^{n_k} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^n + C$; alors $g_k \in \mathbb{Z}$, et on peut le majorer en valeur absolue :

$$|g_k| \leq \sum_{n=0}^{n_k} (|A| M^2 \rho(n) + |B| M) q^n + |C|.$$

Or on sait ([4], p. 262, th. 317, et § 18-7, p. 270) que

$$\rho(n) \leq \exp \frac{\log n}{\log \log n},$$

donc :

$$|g_k| \leq (|A| M^2 + |B| M) \exp \frac{\log n_k}{\log \log n_k} \cdot \frac{q^{n_k+1}}{q-1} + |C|.$$

Donc il existe $K \in]0, +\infty[$ tel que, pour k assez grand :

$$(8) \quad |g_k| \leq q^{n_k + (1/\log q)(\log n_k / \log \log n_k) + K}.$$

Supposons $g_k \neq 0$. On déduit de (8) que :

$$(9) \quad v_p(g_k) \leq m \left(n_k + \frac{1}{\log q} \frac{\log n_k}{\log \log n_k} + K \right).$$

Mais si nous utilisons le théorème des nombres premiers dans la suite arithmétique $4n+3$, nous obtenons pour k assez grand :

$$(10) \quad \frac{1}{4} \frac{p_{2[hk]}}{\log p_{2[hk]}} \leq 2hk \leq \frac{p_{2[hk]}}{\log p_{2[hk]}}$$

et par suite, en vertu de $d)$ du lemme :

$$\frac{\log n_k}{\log \log n_k} \leq \frac{\log 4^L + 4L p_{2[hk]}}{\log(\log 4^L + 4L p_{2[hk]})} \leq 64Lhk \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

En reportant ce résultat dans (9), on obtient :

$$v_p(g_k) \leq m \left(n_k + \frac{64hL}{\log q} k + K \right).$$

Grâce au choix de h , cette inégalité contredit (6) et (7) pour k assez grand. Donc $g_k = g_{k(m)} = 0$ pour m assez grand, et on obtient alors :

$$0 = g_{k(m+1)} - g_{k(m)} = \sum_{n=n_{k(m)}+1}^{n_{k(m+1)}} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^n.$$

En utilisant $a), b), c)$ du lemme, il vient, pour un entier r compris entre 1 et $n_k + n'_k$:

$$2A a(r) a(n_k + n'_k + 1 - r) + \sum_{n=n_{k(m)}+n'_{k(m)}+\delta+2}^{n_{k(m+1)}} (A \rho_a(n) + B l(n)) q^{n - n_{k(m)} - n'_{k(m)} - 1} = 0.$$

Donc $q^{\delta+1}$ divise $2A a(r) a(n_k + n'_k + 1 - r)$, ce qui contredit le choix de δ , et achève la démonstration.

Je remercie M. J.-P. Bézivin, professeur à l'Université de Caen, pour ses suggestions à partir d'une première version de ce travail.

Note remise le 29 mars 1993, acceptée après révision le 14 mai 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. BUNDSCHUH, Quelques résultats arithmétiques sur les fonctions thêta de Jacobi, in *Groupe d'Étude sur les problèmes diophantiens*, 1983-84, Publ. Math. Univ. Pierre-et-Marie-Curie n° 64, fasc. 1.
- [2] D. DUVERNEY, Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions thêta, *Acta Arith.* (à paraître).
- [3] S. GRAHAM, On Linnik's constant, *Acta Arith.*, 39, 1981, p. 163-179.
- [4] G. H. HARDY et E. M. WRIGHT, *An Introduction to the theory of numbers*, Oxford Sci. Publ., 1989.