Bulletin de l'APMEP n° 367
(Février 89)

la classe de math au jour le jour

Si vous avez réussi, avec vos élèves, un cours, une séance de T.D. ou d'exercices, si vos élèves ont particulièrement bien réagi à un problème, une situation, envoyez-nous un compte rendu détaillé de votre activité en précisant la classe, le thème, le contenu précis et, si vous le souhaitez, les réactions de vos élèves, les vôtres, comment vous avez, ensuite, exploité les résultats. Si chacun envoie une idée, on pourra faire tout un livre !

Envoyez vos idées et aussi vos questions à :

Christiane MORIN
128, rue Font Del Mazet
34830 Clapiers

travaux pratiques pour les premières scientifiques (deuxième partie)

par Daniel Duverney
Lycée Alain-Fournier, Bourges

On trouvera ci-après d'autres exemples de problèmes expérimentés comme TP en première S (pour la première partie, voir *Bulletin* n° 364).

I. Exemple n° 3 : Problèmes de démographie

A) *Texte*

Première partie

On connaît les résultats des deux dernières recensements de la population française :

1975 : 52,658 millions d'habitants
1982 : 53,843 millions d'habitants

On désire construire un modèle mathématique qui permette d'obtenir une estimation, la plus juste possible, de la population française entre 1975 et 1982 (par exemple, en 1977), et en 1983.

Pour cela, on note u_0 la population en 1975, u_1 la population en 1976, etc.

a) On suppose que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Calculer alors la raison r de cette suite, puis la population dans les années 1976, 1977, etc. Représenter l'évolution de u_n sur un graphique (n en abscisse, u_n en ordonnée).

b) On suppose maintenant que la suite (u_n) est une suite géométrique. Calculer dans ce cas la raison q de cette suite (garder tous les chiffres donnés par la calculatrice), puis les valeurs de u_1, u_2, etc. sous cette hypothèse. Représenter l'évolution de la suite (u_n) sur le même graphique que précédemment.

c) Existe-t-il une raison objective de choisir entre la suite arithmétique et la suite géométrique ? Pourquoi ? Finalement, quelle estimation donneriez-vous de la population française en 1983 ?

Deuxième partie

En fait, on connaît aussi le résultat du recensement de 1968 : 49,795 millions d'habitants.

a) Calculer la population française en 1968 à partir du modèle géométrique adopté précédemment. Comment expliquez-vous le résultat obtenu ?

b) La différence entre la population réelle en 1968 et celle que nous calculons grâce à notre modèle semble prouver que le taux d'accroissement de la population française n'est pas une constante, mais aurait plutôt tendance à baisser. Pour tenir compte de ce fait, nous supposerons que la suite (u_n) n'est pas exactement géométrique, mais obéit à une relation de récurrence du type :

$$u_{n+1} = \frac{a}{b+n} u_n ,$$

a et b étant deux constantes inconnues pour l'instant.

On note u_0 la population de 1968, u_1 celle de 1969, etc. Démontrer que :

$$u_7 = \frac{a^7}{b(b+1).....(b+6)} . u_0 \quad \text{et} \quad u_{14} = \frac{a^7}{(b+7)(b+8)...(b+13)} .u_7.$$

c) Démontrer que

$$\frac{b(b+1)...(b+6)}{(b+7)(b+8)...(b+13)} = \frac{u_{14}.u_0}{u_7^2} \approx 0,96691.$$

d) L'équation ci-dessus est difficile à résoudre. Pour simplifier le problème, nous supposerons que b est grand ($b > 1000$). Dans ce cas, vérifier que b^5, b^4, b^3, b^2, et b sont négligeables devant b^7 et b^6, en déduire que b vérifie approximativement l'équation :

$$\frac{b+21}{b+70} \approx 0,96691.$$

e) Résoudre cette équation (on arrondira le résultat à l'entier le plus proche). L'hypothèse supplémentaire du d) était-elle justifiée ?

f) Calculer la valeur de a (on arrondira à l'entier le plus proche).

g) Calculer, suivant ce modèle, les populations de la France de 1968 à 1983.

B) *Commentaires*

Ce texte permet d'effectuer une comparaison entre les suites arithmétiques et géométriques, et de montrer comment certains modèles sont mieux adaptés à certaines situations.

Question c) de la première partie : Pour ce qui concerne les problèmes démographiques, les suites géométriques sont mieux adaptées que les suites arithmétiques, puisque l'augmentation d'une population se traduit par un taux.

Le modèle de la deuxième partie, conçu pour expliquer la baisse du taux d'accroissement de la population, est très mauvais du point de vue des résultats obtenus (le rapport u_{u+1}/u_n tend vers 0 ; on obtiendrait de meilleurs résultats en utilisant des exponentielles). Il permet néanmoins aux élèves d'effectuer quelques calculs. La technique de résolution approchée d'équations qui y est utilisée, moyennant des hypothèses "réalistes" sur l'inconnue, est d'utilisation fréquente en Physique et Chimie.

Pour vérifier que, lorsque b est grand, disons plus grand que 1000, b, b^2 etc. b^5 sont négligeables devant b^6 et b^7, il suffit de faire remarquer aux élèves que b^7 est de l'ordre de 10^{21}, b^6 de l'ordre de 10^{18}, b^5 de l'ordre de 10^{15}, d'où $\frac{b^5}{b^7} \approx 10^{-6}$ et b^5 peut être négligé, en première approximation devant b^6 et b^7.

Ces TP durent deux heures.

II. Exemple n° 4 : La quadrature de la parabole

A) *Texte*

La quadrature de la parabole a été réalisée par Archimède au III^e siècle avant J.C. Plus précisément, étant donnée la parabole d'équation cartésienne $y=x^2$, et deux points A et B sur cette parabole, Archimède a démontré que l'aire comprise entre la corde [AB] et la parabole (aire hachurée sur la figure 1) était égale aux deux tiers de l'aire du triangle ABC, C désignant le point d'intersection des tangentes à la parabole en A et B respectivement.

Toutefois, nous démontrerons ce résultat d'une manière différente de celle utilisée par Archimède : celui-ci s'est servi de certaines propriétés de la parabole qui ne sont pas du programme de Première.

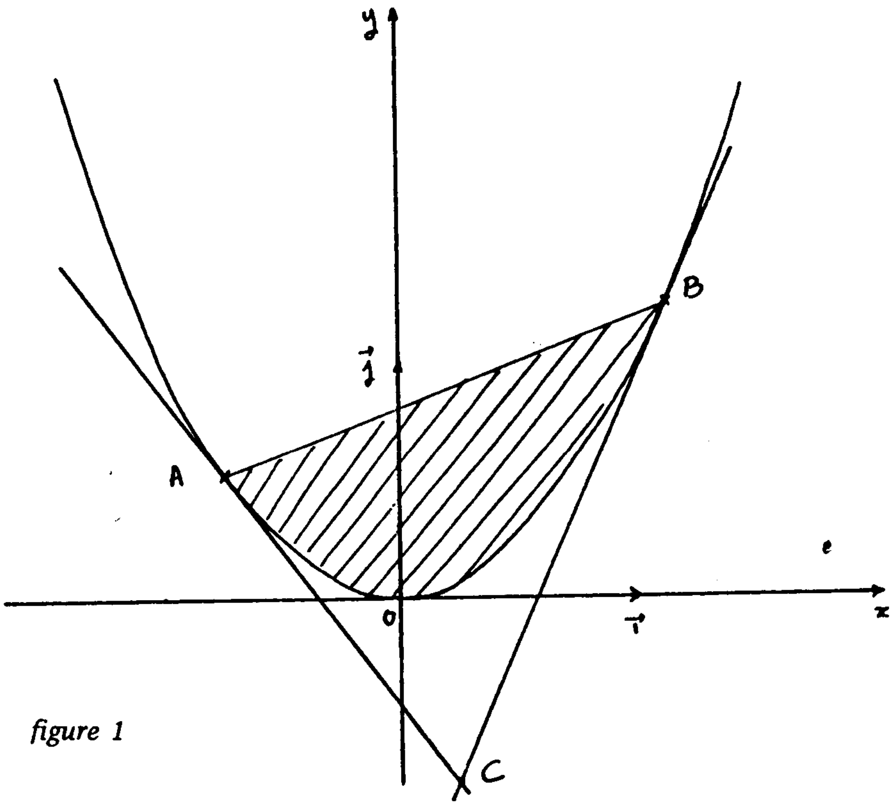

figure 1

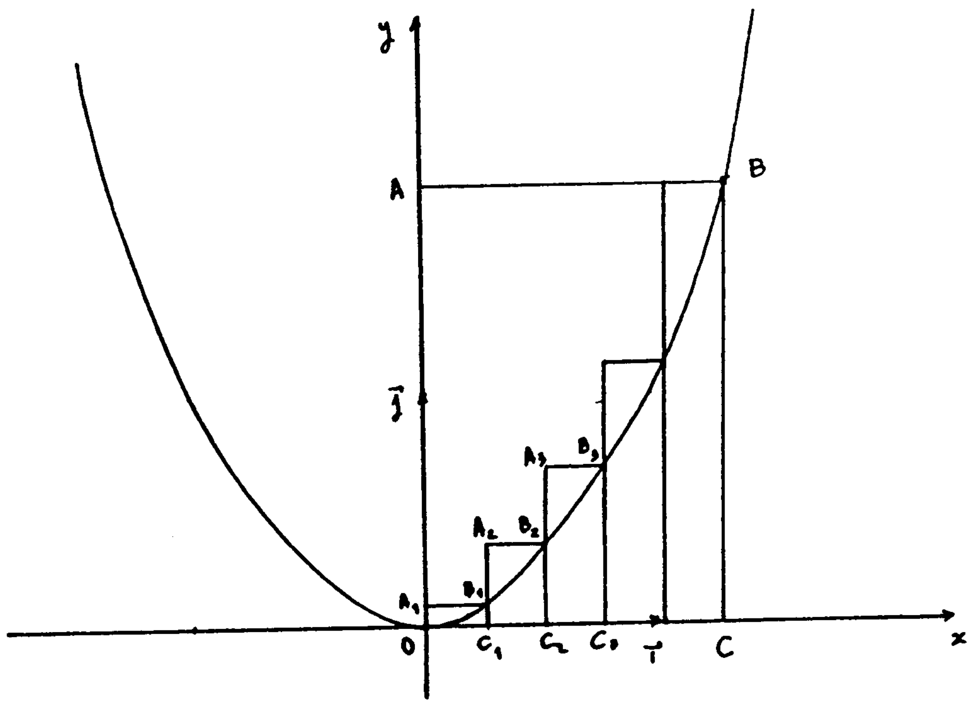

figure 2

Première partie : premier calcul de surface

1) Dessiner avec précision, sur papier millimétré, la parabole d'équation $y=x^2$. (Echelle : repère orthonormé Oxy, unité 5 cm).

2) Soit B un point quelconque de la parabole (pour le graphique, on prendra pour l'abscisse b de B : b = 1,2). On note A la projection orthogonale de B sur l'axe des y, et C la projection orthogonale de B sur l'axe des x. On se propose, dans cette partie, de démontrer le résultat suivant : l'aire comprise entre l'axe des y, la parabole et le segment AB, vaut les 2/3 de l'aire du rectangle OCBA.

Pour cela, on subdivise l'intervalle [OC] en n intervalles égaux OC_1, C_1C_2, ... (voir figure 2), puis on construit les rectangles $OC_1B_1A_1$, $C_1C_2B_2A_2$, ...

Faites la figure avec n = 12, puis n = 24 (utiliser des couleurs différentes). Intuitivement, si on note S_n la somme des surfaces des n rectangles, que se passe-t-il pour S_n lorsque $n \to +\infty$ (1) ?

3) Exprimer, en fonction de b et n, la surface s_1 du premier petit rectangle, la surface s_2 du deuxième petit rectangle, ..., la surface s_n du n-ième petit rectangle. En déduire l'expression de S_n en fonction de b, et de n.

4) Déterminer un polynôme $P(x)$ du troisième degré tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) - P(x-1) = x^2 .$$

En déduire l'expression de la somme $T_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ en fonction de n.

5) Calculer la limite de la suite S_n lorsque $n \to +\infty$ (1), et en déduire le résultat annoncé à la question 2).

Deuxième partie : Démonstration du résultat d'Archimède

1) Redessiner avec précision, sur papier millimétré, la parabole d'équation $y = x^2$ (même échelle).

2) a et b étant deux nombres réels tels que $0 < a < b$, on considère les points A et B sur la parabole d'abscisses respectives $-a$ et b (pour le dessin, on prendra $a = 0{,}8$ et $b = 1{,}2$). Déterminer, en fonction de a et b, l'équation de la droite (AB), puis les coordonnées du point d'intersection E de cette droite et de l'axe des y.

3) Déterminer les équations des tangentes (T_A) et (T_B) à la parabole en A et B respectivement, puis calculer les coordonnées de C, intersection de (T_A) et (T_B).

4) On note (D_A) et (D_B) les parallèles à Oy passant par A et B respectivement : (D_E) et (D_C) les parallèles à Ox passant par E et C respectivement ; F la projection orthogonale de B sur Oy ; V et U les intersections respectives de (D_E) avec (D_A) et (D_B) ; A' et B' les projections orthogonales de A et B sur Ox ; H, L et K les intersections respectives de (D_C) avec (D_A), Oy et (D_B) ; enfin, D désigne la projection orthogonale de A sur Oy. Compléter le dessin en y faisant figurer ces droites et ces points.

5) Que peut-on déduire de la question 3), concernant la position de C par rapport à H et K, et la position de l'origine O par rapport à E et L ?

6) On note $\mathcal{S}(ABC)$ la surface du triangle ABC, $\mathcal{S}(AHKB)$ la surface du trapèze AHKB. Démontrer que :

$$\mathcal{S}(ABC) = \frac{1}{2}\,\mathcal{S}(AHKB)$$

7) Soit $\mathcal{A}$ l'aire comprise entre la parabole et la corde AB, aire que l'on cherche à calculer. Démontrer, à l'aide de la première partie, que :

$$\mathcal{A} = \frac{2}{3}\,\mathcal{S}(A'ODA) + \frac{2}{3}\,\mathcal{S}(OB'BF) + \mathcal{S}(AED) - \mathcal{S}(EBF) .$$

---

(1) Cette question est en dehors du programme de Première, c'est pourquoi nous verrions mieux ce TP en Terminale (note du responsable de la rubrique).

8) Par un découpage convenable du trapèze AHKB, en déduire que $3\mathcal{A} = \mathcal{S}(AHKB)$, puis conclure.

B) ***Commentaires***

Remarquons d'abord qu'il existe un autre problème sur la quadrature de la parabole, dans le polycopié de l'IREM de Strasbourg : "Travaux Pratiques en Première S". Ce dernier est plus proche de la démonstration d'Archimède, et me paraît plus difficile que celui que je propose.

L'expérience a montré qu'il faut compter 4 heures environ pour sa réalisation : deux heures pour la première partie et deux heures pour la deuxième.

La première partie ne pose pas de grandes difficultés et offre une bonne introduction à la méthode des rectangles. Le lecteur intéressé par cette méthode (ou méthode d'exhaustion) en trouvera deux autres exemples dans "Histoire des logarithmes de Neper à Euler" (Charles Naux, Editions Blanchard) : la quadrature de la logarithmique par Torricelli et la quadrature de $y = \tan x$ par Grégory.

La deuxième partie est plus difficile pour les élèves, notamment pour comprendre que la géométrie analytique ne sert que d'intermédiaire pour obtenir les résultats de la question 6). Les découpages de la fin sont assez délicats pour eux, mais certains y arrivent.

La démonstration du résultat d'Archimède se trouve dans **Deltheil** et **Caire**, *"Géométrie, classe de mathématiques"* J.B. Baillière et fils Editeurs, Paris 1939, dont une réédition est en cours.