METHODOLOGIE DANS LA RECHERCHE DES PROBLEMES ET COURS DE MATHEMATIQUES

Colloque inter-IREM
La Place du Problème
dans l'enseignement des Mathématiques"
Lyon, 21 et 22 Mai 1982

Daniel DUVERNEY

RESUME : Ce texte a pour but de critiquer, de manière constructive, la façon dont on expose ordinairement les mathématiques. Dans ce but, je propose d'autres démonstrations possibles de deux théorèmes classiques d'analyse au niveau des lycées ; ces démonstrations sont basées sur une *approche heuristique** des théorèmes à démontrer. J'essaye enfin de montrer que cette approche se transpose sans difficulté à la correction et à l'étude méthodique des problèmes. Le texte se termine par une courte bibliographie commentée.

I. INTRODUCTION

L'enseignement des mathématiques se trouve dominé par un *modèle* sur la façon d'exposer les mathématiques : il s'agit du *modèle déductif*. Ceci a été particulièrement vrai durant les dix dernières années, où la correction formelle, portée au pinacle, tenait lieu de rigueur. On s'est pourtant aperçu assez vite que, comme l'affirme René Thom, "l'absolue rigueur n'est possible que dans l'insignifiance", et qu'il était peut-être temps de *donner un sens* aux notions étudiées. C'est me semble-t-il, un des buts de la réforme introduite dans les classes de seconde cette année, et qui touchera les classes de première l'année prochaine. On a essayé de *donner un sens* aux notions étudiées au moyen de manipulations*.

---

* *heuristique : qui a rapport avec la découverte d'une solution.*

* Du moins en théorie, car au niveau de la pratique la manipulation des objets mathématiques a posé de sérieux problèmes de *temps* et de *motivation* des élèves.

Pourtant, le modèle déductif reste dominant. En effet, l'étude d'un thème (manipulation) peut précéder ou suivre la mise en forme théorique (rigoureuse), cela ne change rien (du moins au niveau des manuels) : au niveau de la *rédaction des études*, ou de *l'exposé* des notions nouvelles même motivées par une étude préalable, le modèle déductif est roi. Il constitue, au sens propre du terme, le "modèle" à suivre par les élèves qui, très souvent, ont beaucoup de mal à y arriver. Le modèle déductif nous impose de rédiger nos raisonnements suivant le schéma simplificateur :

$$\text{Connu} \longrightarrow \text{Inconnu}$$

Il gomme tous les temps forts de la recherche de la solution d'un problème, le dépassement de chacun des obstacles étant effacé par une simple *justification* (utilisation d'une hypothèse, d'un théorème...). Voici un exemple typique de ce phénomène, emprunté au programme de première scientifique.

Théorème : x_0 est racine du polynôme $P(x)$

$\Longleftrightarrow \exists$ un polynôme $Q(x)$, tel que $P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$

Démonstration : a) Montrons d'abord :

x_0 est racine de $P(x) \Longrightarrow \exists\, Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$.

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - x_0)$:

$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + R(x)$, avec $\deg R(x) < \deg (x - x_0)$.

Puisque $\deg(x - x_0) = 1$, $\deg R(x) = 0$, donc $R(x) = \text{constante}$.

Mais

$P(x_0) = (x_0 - x_0)\, Q(x_0) + R(x_0) = R(x_0) = 0$ (puisque x_0 est racine de $P(x)$). Donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $R(x) = \text{constante} = R(x_0) = 0$ et par suite :

$P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$, c.q.f.d.

b) Montrons maintenant :

$\exists\ Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)\ Q(x) \Rightarrow x_0$ est racine de $P(x)$

C'est immédiat, car $P(x_0) = (x_0 - x_0)\ Q(x_0) = 0$.

Le théorème est donc démontré.

Quel est le défaut d'une telle démonstration, *du point de vue de l'enseignement* ?

D'abord, la séparation de l'équivalence à démontrer en deux implications de sens contraire n'est pas soulignée. Il s'agit d'une première difficulté heuristique qui se trouve ainsi gommée (et niée).

Ensuite, on se trouve (pour l'implication $\Rightarrow$) devant un enchaînement d'énoncés dont chacun peut-être expliqué individuellement (on peut donner beaucoup plus de détails que je ne l'ai fait), mais le mode de présentation suivi (fondé sur le modèle déductif) ne permet pas d'appréhender *l'idée directice* de la démonstration, la démarche *globale* suivie, ni de la *justifier* par des considérations heuristiques.

Quelle est la conséquence de cela ?

La plupart des élèves ne comprendront pas la démonstration, et seront incapables de la *réinvestir* dans d'autres problèmes. Ils "connaîtront" peut-être (peut-être !) cette démonstration (éventuellement par coeur), mais ce ne sera que la démonstration de *ce* théorème particulier. Or, il s'agit d'une des démonstrations les plus *riches* que l'on puisse trouver dans le second degré du point de vue *heuristique*. Je vais en donner ci-après une autre présentation possible, obtenue en considérant le théorème à démontrer comme *un problème à résoudre*, et en procédant avec méthode.

2) *DEMONSTRATION D'UN THEOREME SUR LES RACINES D'UN POLYNOME*

Le problème à résoudre est donc de démontrer :

x_0 est racine de $P(x) \Leftrightarrow \exists\ Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)\ Q(x)$.

Ce que nous pouvons constater d'abord, c'est que nous voulons démontrer *une équivalence*. Or nous savons que, pour démontrer une équivalence, nous pouvons (sans que cela soit obligatoire) essayer de démontrer successivement l'implication dans chaque sens.

Nous pouvons donc penser que notre problème (noté PB par la suite) sera résolu si nous résolvons les deux *problèmes auxiliaires* suivants :

Problème auxiliaire n° 1 : (PBA 1) : x_0 est racine de $P(x) \Rightarrow \exists\, Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$.

Problème auxiliaire n° 2 : (PBA 2) : $\exists\, Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)\, Q(x) \Rightarrow x_0$ est racine de $P(x)$.

Nous obtenons donc le *schéma de résolution* provisoire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{PBA 1} \searrow & \\ & \text{PB} \\ \text{PBA 2} \nearrow & \end{array}$$

Les flèches signifient ici : si PBA 1 et PBA 2 sont résolus, PB le sera aussi. Essayons maintenant de résoudre ces deux problèmes auxiliaires. Nous nous apercevons rapidement que PBA 2 se résoud facilement, puisqu'il suffit d'examiner la conclusion (x_0 est racine de $P(x)$) pour voir qu'il faut vérifier $P(x_0) = 0$* , ce qui est immédiat.

Donc PBA 2 est résolu tout de suite, ce qui est un *indice de progrès** certain : puisque nous nous sommes ramenés, maintenant, d'une *équivalence* à démontrer (PB) à une *implication* à démontrer (PBA 1).

Cherchons donc à résoudre, maintenant, PBA 1 .

Examinons, une fois de plus, la conclusion : il s'agit de démontrer :

$\exists\, Q(x)$ tel que $P(x) = (x - x_0)\, Q(x)$.

Ce n'est pas si facile que cela, en fait ; il y a là un problème de *synonyme* : voir F. Reynes (Bibliographie)

Cf. Polya, "Comment poser et résoudre un problème", p. 33

Il s'agit là, en fait, d'un problème de *reconnaissance de forme* : cette égalité à démontrer *peut nous faire penser* à un résultat que nous connaissons, et qui lui *ressemble* beaucoup :

$$\exists\ Q(x)\ ,\ R(x)\quad \text{tels que} \quad : \quad \left[\begin{array}{l} P(x) = (x - x_0)\ Q(x) + R(x) \\ \deg R(x) < \deg\ (x - x_0) \end{array}\right.$$

(théorème de la division euclidienne).

Pourrions-nous utiliser ce résultat ici ? Oui : nous voyons tout de suite que notre conclusion serait démontrée si nous pouvions démontrer que $R(x) = 0$. Autrement dit, nous arrivons à un troisième problème auxiliaire :

PBA 3 : Avec les mêmes hypothèses que précédemment, démontrer que $R(x) = 0$.

Notre nouveau schéma de résolution est donc :

$$\begin{tikzcd} \text{PBA 3} \arrow[r] & \text{PBA I} \arrow[dr] & \\ & & \text{PB} \\ & \text{PBA 2} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Pouvons-nous démontrer que $R(x) = 0$? L'exposé "déductif" utilise l'inégalité $\deg R(x) < \deg(x - x_0)$ sans précautions et *masque* ainsi la *méthode de base* que l'on utilise et qui consiste à se ramener à deux problèmes auxiliaires :

PBA 4 : Démontrer que $R(x) = \text{constante}$

PBA 5 : Démontrer que $R(x) = 0$ pour une *valeur particulière*.

Le schéma de résolution devient :

$$\begin{tikzcd} \text{PBA 4} \arrow[dr] & & & \\ & \text{PBA 3} \arrow[r] & \text{PBA 1} \arrow[dr] & \\ \text{PBA 5} \arrow[ur] & & & \text{PB} \\ & & \text{PBA 2} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ce théorème est une *bonne occasion* d'introduire la méthode suivante :

I étant un intervalle et a un réel donné, pour démontrer que $f(x) = a$, $\forall x \in I$, il est parfois possible de se ramener aux deux problèmes auxiliaires suivants :

a) Montrer que $f(x) =$ constante* ;

b) Montrer que cette constante est a en calculant $f(x)$ pour une valeur de x bien choisie.

Cette méthode est d'utilisation courante, par exemple pour démontrer que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Nous avons maintenant, semble-t-il, réduit la démonstration à ses éléments essentiels. Nous pouvons alors constater que l'exposé déductif :

a) introduit, en plaçant les différents problèmes auxiliaires les uns à la suite des autres sans expliciter leurs liens, un ordre *linéaire* (temporel) qui empêche de saisir *l'enchaînement réel des idées* de la démonstration.

b) ce ce fait, il empêche de montrer la *logique* (heuristique) qui procède à l'apparition de ces problèmes auxiliaires.

3. UN AUTRE PROBLEME

Théorème : $\forall n \in \mathbb{Z}$, la dérivée de x^n est nx^{n-1}.

Ceci est un théorème dont la démonstration ne s'impose peut être pas au niveau du second cycle : d'après mon expérience, les élèves l'acceptent fort bien par généralisation des cas $n = 2$, 3 et 4. Pourtant, il arrive un moment où il faut le démontrer : il me semble que la démonstration de ce théorème, convenablement exploitée, peut-être utile à des élèves de terminale C. Nous allons essayer de l'analyser.

---

* Cela se fait le plus souvent en utilisant la dérivée

La première idée que nous puissions avoir, pour démontrer ce résultat, est d'utiliser la *définition* de la dérivée, c'est-à-dire d'étudier la limite, lorsque $h \to 0$, du rapport :

$$T(h) = \frac{(x + h)^n - x^n}{h} \qquad \text{(PBA 1)}$$

On a une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$, il nous faut donc chercher à éliminer h entre le numérateur et le dénominateur. Ici intervient, encore une fois, un problème de reconnaissance de forme : la vue de $(x + h)^n$ *nous fait penser* à la formule du binôme de Newton. Le problème, ici, est que cette formule ne peut s'utiliser que pour $n \in N$. Mais comme, manifestement, dans ce cas, nous risquons bien d'arriver à démontrer le résultat, nous pouvons *dichotomiser** notre problème de départ :

PBA 2 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x^n)' = nx^{n-1}$

PBA 3 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{Z}-N$, $(x^n)' = nx^{n-1}$

On a le schéma de résolution :

$$\begin{array}{lll} \text{PBA 1} \longrightarrow & \text{PBA 2} \searrow & \\ & & \text{PB} \\ & \text{PBA 3} \nearrow & \end{array}$$

Nous avons une bonne piste pour résoudre PBA 2 , par contre nous n'en avons pas pour résoudre PBA 3 . Mais cette *dichotomie* du problème est un *indice*

---

* La méthode de dichotomie est basée sur le principe du tiers-exclu.

de progrès, puisqu'elle nous donne une idée pour démontrer le théorème "dans la moitié des cas". On vérifie après un petit calcul que PBA 2 se résoud en passant par PBA 1, comme prévu. Mais il est intéressant de remarquer que nous pouvons résoudre PB A 2 d'une manière plus simple : en examinant son énoncé, nous remarquons en effet qu'il s'agit de démontrer une propriété "$\forall n \in \mathbb{N}$" : à la vue d'un énoncé de ce type, nous devons penser automatiquement qu'il est *peut-être* possible d'utiliser un raisonnement par récurrence* . De fait, c'est possible ici, et les calculs sont beaucoup plus simples que l'orsqu'on utilise la formule du binôme. PBA 2 est donc résolu, par deux méthodes différentes. Comment faire pour PBA 3 ? Il suffit sans doute d'étudier un cas particulier pour nous mettre sur la voie : par exemple, $x^n = x^{-2}$. Ceci nous permet de reconnaître qu'un nombre $n \in Z - N$ s'écrit $n = -p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, et que $x^n = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$. Nous pouvons alors résoudre PBA 3 en utilisant le théorème sur la dérivée de l'inverse d'une fontion *et le résultat démontré en PBA 1* (ce qui s'appelle *se ramener au cas précédent*). Le calcul exige de savoir manipuler correctement les exposants mais ne présente pas, sinon, de difficultés majeures.

Cette démonstration achevée, il s'agit, comme dans un conte, d'en tirer la *morale*, ou la leçon. On en tire une *méthode* intéressante :

Pour démontrer qu'une priorité est vraie $\forall n \in \mathbb{Z}$, il est parfois possible de *dichotomiser* le problème :

a) démontrer que la priorité est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$ (éventuellement par récurrence).

---

* On se ramène alors à deux problèmes auxiliaires :

PBA 4 : Montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$

PBA 5 : On suppose la propriété vraie pour n . Montrer qu'elle est vraie pour $n + 1$.

b) Démontrer que la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, en posant $n = -p$ et en utilisant le résultat du premier problème auxiliaire.

Cette méthode s'utilise, par exemple, pour démontrer le petit théorème de Fermat (cf. R. Honsberger, Joyaux Mathématiques, Vol 1, CEDIC, p. 13-14).

4) CONCLUSION

Nous voyons donc, sur ces deux exemples, qu'il est possible d'aborder les démonstrations dans un ordre différent de celui imposé par le modèle déductif. Il me semble important de comprendre que l'utilisation du modèle déductif dans l'enseignement se fonde sur le principe (non-dit) suivant :

IL SUFFIT D'EXPLIQUER CLAIREMENT ET MINUTIEUSEMENT POUR ETRE COMPRIS

Ainsi, si un élève ne comprenait pas la première démonstration (§ 1) du théorème sur les racines d'un polynôme, on pourrait, sans changer de modèle, la détailler plus, par exemple mieux expliquer pourquoi un polynôme de degré zéro est une constante, ou donner encore d'autres précisions.

Le modèle déductif admet donc la notion *d'obstacle*, mais seulement la notion *d'obstacle local*. Il lui est impossible d'intégrer la notion *d'obstacle global* : un obstacle global, dans un problème (par exemple dans une démonstration) est constitué essentiellement par le *plan de résolution*, mis en évidence par Polya, et qui est inconnu au départ. Pourtant, on peut souvent le trouver en réfléchissant de manière logique (méthodique). Nous nommerons cette forme de logique "*logique heuristique*", par opposition à la logique formelle. La logique heuristique ne donne pas de certitudes, mais seulement des probabilités, des hypothèses de travail à tester, qui conduisent souvent, comme on l'a vu sur ces exemples, à des problèmes auxiliaires, qui seront la trame du plan de résolution.

Je n'ai pas la place de développer ici davantage ces notions. De toutes façons, il ne s'agit là que d'hypothèses, qui demanderaient à être confirmées par l'expérience. Mais je suis personnellement convaincu qu'une approche "heuristique" des démonstrations et des corrigés de problèmes, ainsi qu'une initiation à cette approche lors des interrogations orales par exemple, permettrait d'améliorer les capacités de nos élèves à résoudre les problèmes mathématiques.

5) *BIBLIOGRAPHIE*

Pour un essai de mise en pratique des idées ci-dessus dans un manuel destiné aux élèves, on pourra lire mon "Cours d'Introduction aux Méthodes de Résolution des Problèmes", publié par l'I.R.E.M. de LILLE. Il contient un cours complété par des exercices corrigés (arithmétique et analyse ; niveau première et terminale scientifiques).

Le point de départ des réflexions qui précèdent est évidemment G. POLYA : "La découverte des mathématiques" et "Comment poser et résoudre un problème", tous les deux chez DUNOD.

Le polycopié "Heuristique" de l'I.R.E.M. de MONTPELLIER (Avril 1975) relate une expérience très rigoureuse d'étude de comportements de recherche de problèmes. Les auteurs concluent : "Il n'est pas étonnant qu'un enseignement uniquement déductif fasse la preuve de son inadaptation".

On trouvera d'autres exemples d'analyses de démonstration dans un article de N. BALACHEFF paru dans "Educational Studies in Mathematics" (1980) : "Une étude, à l'aide de graphes, de démonstrations mathématiques formulées par des élèves" (Niveau DEUG), et dans un article de F. Reynes paru dans le bulletin de l'A.P.M.E.P. de décembre 1981 : "Langage, synonymie et démonstration" (Niveau 1er cycle).

Enfin, le "Cours d'Heuristique" de G. Glaeser constitue une base pour tous ceux qui veulent réfléchir (et agir) sur l'heuristique. Il offre un panorama des diverses approches possibles et fournit une abondante bibliographie sur le sujet.