SUR L'ANALYSE DES ERREURS DES ELEVES EN MATHEMATIQUES

Daniel Duverney

IREM de Lille

1983

SUR L'ANALYSE DES ERREURS DES ELEVES EN MATHEMATIQUES.

Chapitre 1: Introduction 1

Chapitre 2: La fiche d'observation: un instrument de diagnostic 6

Chapitre 3: Un exemple de diagnostic et traitement d'erreur sur les suites proportionnelles 11

Chapitre 4: Un exemple de diagnostic et traitement d'erreur sur les équations du premier degré 16

Chapitre 5: Un exemple de diagnostic et traitement d'erreur dans le calcul des ensembles de définition 24

Chapitre 6: Conclusions (provisoires) et propositions 28

Bibliographie 30

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION.

I) Quel est le problème?

Le problème de départ est le suivant: une bonne part du travail d'un professeur de mathématiques consiste à corriger des copies. Au cours de ce travail, il a l'occasion de rencontrer quantité d'erreurs. Que peut-il faire de toutes ces erreurs?

La formation que j'ai reçue pour mon métier, pour ce qui me concerne, ne m'a absolument pas préparé à faire face à ce problème. Ainsi, jusqu'à présent, je le résolvais de la manière suivante: en face de l'erreur, dans la copie de l'élève, j'écrivais "Non", ou bien "Faux", ou bien "Inexact", "Incorrect", "Faites attention", ... Après avoir rendu le devoir à mes élèves, je le corrigeais au tableau pour toute la classe, comme on m'avait appris à le faire. Evidemment, je n'allais pas, par la suite, me pencher sur le dos de mes élèves pour savoir ce qu'ils faisaient de leur copie lorsque la correction était terminée.

Cette méthode de travail présente deux inconvénients, au moins:

a) Elle engendre l'ennui: ennui pour l'enseignant pendant la correction des copies, car il est désarmé et souvent démoralisé devant le problème des erreurs, et aussi pendant la correction au tableau, car il semblerait bien que les élèves n'écoutent pas avec toute l'attention voulue. Ennui pour les élèves pendant la correction au tableau, qui souvent ne tient pas compte de leurs erreurs particulières et leur présente un modèle de ce qu'ils auraient dû faire.

b) Comme personne n'y croit tellement (ceci résulte du a)), l'efficacité totale du système est très faible.

Or, il est fort désagréable de fournir un travail important (par le temps qu'on y passe) et d'avoir, dans le même temps, de sérieux doutes sur son efficacité. Pour ce qui me concerne, je veux bien passer un peu plus de temps à corriger les copies de mes élèves, à condition que mon travail soit plus efficace et plus intéressant. Il s'agit là, bien entendu, d'une option philosophique.

Pour voir comment nous pouvons aborder le problème des erreurs dans la correction des copies, il est nécessaire de nous donner un cadre théorique. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe suivant, essentiellement inspiré par Anna Bonboir [2] (les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie).

II) Pédagogie corrective.

1) D'une façon générale, et pas seulement en mathématiques, la pédagogie corrective fonde son action sur l'observation d'un écart négatif entre le comportement de l'élève et le comportement qu'on en attendait. Du point de vue pratique, le comportement observé et le comportement attendu se mesurent au moyen des résultats obtenus à une épreuve: devoir à la maison, devoir en classe, interrogation orale, test, etc...

Les erreurs que nous rencontrons en grand nombre dans les devoirs de mathématiques de nos élèves sont un des exemples les plus remarquables de cet écart entre le comportement qu'on attendait et celui qu'on obtient.

2) Du point de vue de l'enseignement en général, la pédagogie corrective ne s'intéresse donc pas, au départ, au problème de l'élaboration des programmes, ni des objectifs poursuivis par l'enseignement: elle se place dans le cadre donné des programmes tels qu'ils sont. Mais évidemment, les résultats obtenus par la pédagogie corrective devront lui permettre, par la suite, de tirer des conclusions sur certaines parties de ces programmes: certaines exigences sont-elles légitimes, les élèves ont-ils la possibilité de réaliser tout ce qu'on attend d'eux?

3) Il est clair que la pédagogie corrective doit tenir compte des différences individuelles entre les élèves. Mais il ne saurait être question qu'elle vise à une uniformisation des comportements, en poursuivant le but utopique de l'élève "type" pour un niveau donné.

Le but qu'elle peut se fixer serait plutôt de fournir à chaque élève le minimum sans lequel adaptation et progrès sont de vains mots.

En mathématiques, et pour ce qui concerne notre travail sur les erreurs, un des buts de la pédagogie corrective serait d'empêcher que ne s'installe, à titre permanent, chez de nombreux élèves, des erreurs durables qui les empêchent de suivre une scolarité normale en mathématiques. On peut constater ce genre de phénomène dans les lycées techniques, les L.E.P., et dans bon nombre de C.E.S., en particulier.

4) Dans beaucoup de domaines, et notamment en mathématiques, l'apprentissage d'une matière se présente comme une suite ordonnée de connaissances et de savoir-faire à acquérir. Dès lors, la question qui se pose est la suivante: la pédagogie corrective peut-elle être efficace? Dans quelle mesure peut-on rétablir la séquence normale lorsque celle-ci a été rompue au départ, ou lorsque l'élève est handicapé par des déficiences antérieures à cette séquence?

La pédagogie corrective peut ainsi se fixer deux objectifs intermédiaires, correspondant à ces deux problèmes:

a) Eliminer les effets d'un évènement accidentel (incompréhension se traduisant par une erreur) rapidement après qu'il se soit produit, de façon à empêcher qu'il ne s'installe à titre habituel chez l'élève et altère la qualité des étapes suivantes.

b) Modifier un facteur négatif (handicap) jusqu'alors permanent chez l'élève, de façon à améliorer la suite des apprentissages qui en dépendent.

D'un point de vue économique, il est clair qu'il est plus

avantageux de viser l'objectif a) dès le début de la scolarité. En effet, il est plus difficile de corriger une erreur lorsqu'on l'a commise depuis longtemps; de plus, la correction risque d'être fragile: l'erreur réapparaîtra facilement en cas de fatigue ou d'inattention. Cependant, dans notre pratique, nous avons souvent affaire à des handicaps antérieurs, donc à l'objectif b), à quelque niveau que ce soit.

Pour ce qui concerne les mathématiques, cela pourrait nous amener à distinguer deux types d'erreurs:

a) L'erreur "normale": dans un apprentissage nouveau, il est normal de se tromper, cela peut même être très instructif pour l'élève, à condition qu'il comprenne son erreur, qu'il en tienne compte, qu'elle ne soit pas traumatisante.

b) L'erreur "pathologique": celle qui intervient dans un calcul ou un raisonnement, résultant d'un apprentissage ancien, et qui ne devrait plus être là si l'apprentissage s'était effectué normalement.

5) Les enseignants, devant le problème posé par certains échecs pédagogiques, ne peuvent se contenter des solutions empiriques consistant à <u>imposer</u> les démarches conduisant à la réussite, et à <u>éliminer</u> celles conduisant à l'échec. Il leur est nécessaire de se poser les questions fondamentales suivantes:

a) Pourquoi ces réussites?

b) Pourquoi ces échecs?

c) Peut-on dégager des constantes dans les réussites ou les échecs?

d) Si oui, pourquoi ces constantes?

D'empirique qu'il était, l'enseignant doit devenir un pédagogue "expérimental": constatant l'effet (c'est à dire, pour ce qui nous occupe, l'erreur), il essaiera de remonter aux <u>causes</u> de l'état constaté. Il fera porter son action non directement sur l'effet (l'erreur), mais sur le ou les antécédents qui en sont reconnus responsables.

Dans la pratique, la démarche à suivre comprendra, en commun avec la médecine, les étapes suivantes:

a) Constatation de la déficience chez les individus ou le groupe d'individus dont l'enseignant est responsable.

b) Diagnostic des difficultés de chaque individu par l'étude des symptômes. Localisation de l'erreur et de ses diverses modalités à l'aide de la fiche d'observation.

c) Recherche des causes de la déficience.

d) Après avoir mis en relation les symptômes de la déficience et les causes, il s'agit de préparer un traitement agissant sur les causes pour annuler les effets. Après expérimentation, si le traitement se révèle valable, cela prouve la justesse du diagnostic quant aux causes de la déficience.

e) Lorsque le résultat du traitement diffère de ce qui était attendu dans quelques cas particuliers seulement, un traitement "sur mesure" se révèle nécessaire.

6) Il est à remarquer que l'utilisation de cette démarche dans le traitement des erreurs de nos élèves pourra nous conduire, souvent, à une auto-critique de notre enseignement initial (ceci apparaîtra, notamment, au chapitre 4, quand nous nous intéresserons aux erreurs dans la résolution des équations du premier degré). Sur ce problème, on pourra lire aussi avec intérêt un article de A. Bouvier dans un bulletin de l'A.P.M. [5].

CHAPITRE 2: LA FICHE D'OBSERVATION: UN INSTRUMENT DE DIAGNOSTIC.

I) Qu'est-ce que la fiche d'observation?

Il s'agit d'un instrument de travail, élaboré par L. Duvert. Je lui laisse ici expliquer lui-même ce dont il s'agit: [1]

C'est pour tenter d'améliorer l'efficacité des corrections que j'ai été amené, aux divers niveaux où j'ai enseigné, à la "fiche d'observations" (F.O.). Le principe en est le suivant ;

J'écris, non pas sur la copie, mais sur une fiche que je remplis progressivement tout au long de l'année scolaire, toutes les observations que l'élève a intérêt à garder sous la main :

• les erreurs (nous sommes, je pense, nombreux à considérer l'erreur non pas comme une "faute" appelant une "punition", mais comme un produit normal de toute activité intellectuelle (celle des enfants et... celle des adultes, professeurs compris), produit qui est une précieuse occasion de réfléchir, de rectifier ou d'approfondir ses connaissances, de mieux se connaître soi-même. "Sbagliando s'impara", dit un proverbe italien : "on s'instruit à coup d'erreurs") : erreurs de fond, de méthode, de rédaction, de vocabulaire,... L'élève doit faire le lien entre l'erreur contenue dans sa copie (par exemple $(3x + 2)^2 = 3x^2 + 12x + 4$) et le principe, le théorème,.. que cette erreur a enfreint et que je porte sur la F.O. (par exemple ab^2 *signifie* $a \times (b^2)$ *et non pas* $(ab)^2$) ; cet effort de sa part me semble bénéfique.

• les négligences matérielles : "Laisse une marge", "Numérote les pages",...

• dans une colonne isolée à l'extrême-droite, des rectifications d'orthographe (sélectionnées dans le grand étalage offert par certaines copies...)

• et enfin, à la suite de ces observations "techniques" relatives à chaque devoir, et s'en distinguant par une autre couleur d'encre, une "appréciation générale" (mais pas de note chiffrée) comportant éventuellement un conseil, une mise en garde, un encouragement, un compliment,...';

cette dernière partie est susceptible de renseigner aussi les parents, même s'ils ne sont pas compétents en mathématiques.

(Sur la copie, ne figurent que quelques commentaires trop spécifiques du sujet traité pour avoir une importance durable, et les classiques "exact", "faux", points d'exclamation, points d'interrogation, et autres traces rougeoyantes du défoulement du correcteur !)

Je souligne *n* fois toute observation déjà faite à propos de *n* copies précédentes (*n* dépasse rarement 4...). Ainsi apparaissent nettement, sur la F.O., au bout de quelques semaines et dans toute la suite de l'année, les "manques" les plus marquants de l'élève, alors qu'une erreur due à la seule étourderie ne se reproduit plus ; il me paraît important de rendre l'élève conscient de la différence entre une erreur accidentelle et une erreur ancrée dans son esprit, différence qu'il n'établit pas toujours de lui-même. S'il s'agit d'une demande toute simple et extra-mathématique, du type "Laisse une marge", je me réserve le droit d'interrompre la correction à la deuxième ou troisième répétition...

Dans chaque copie que je lui rends, l'élève trouve, encartée, la F.O., qu'il me rend en fin de séance après avoir recopié, sur une fiche qui constitue un double de la mienne et qu'il garde par-devers lui, la "moisson" d'observations propre à ce devoir.

Il dispose ainsi d'un document personnalisé qui lui permet d'être spécialement attentif à ne pas refaire les mêmes erreurs. Lorsque je consulte les élèves par un questionnaire (facultatif !) sur ce qu'ils pensent de mes façons de faire, ils sont toujours nombreux à trouver utile la F.O. ; ceux qui reconnaissent la consulter trop peu reconnaissent aussi, spontanément, qu'ils ont tort de la négliger.

Je contrôle, une ou deux fois dans l'année, la bonne tenue du double conservé par l'élève ; car, dans les petites classes, certains étourdis recopient "de travers" telle ou telle observation...

Je conseille aux élèves (à partir de la seconde), de prendre l'initiative de "nourrir" eux-mêmes leur F.O. personnelle d'observations qu'ils se font tout seuls en diverses occasions. Mais ils sont peu nombreux à avoir assez de maturité pour cela.

Les parents, eux aussi, s'ils pensent à jeter un coup d'oeil de temps à autre sur les appréciations générales figurant sur la F.O., ont, du travail, des résultats, des progrès, du "niveau" (!) de leur enfant, une idée bien plus précise que par une suite de notes chiffrées.

De mon côté, je dispose pour chaque élève d'une sorte de "portrait", qui évolue au cours des semaines, et dont je me sers pour rédiger les bulletins trimestriels et lors des entretiens avec les parents.

La correction d'un lot de copies n'est pas rendue plus longue par cette procédure : je n'en écris pas plus que je ne le ferais si j'écrivais tout sur la copie. Je m'astreins à parcourir rapidement les observations précédentes pour signaler les "erreurs à répétition" ; mais c'est assez rapide, et j'ai l'impression, ce faisant, de rendre service aux élèves... Quant à la remise en ordre des F.O. entre deux lots de copies, elle demande un temps négligeable devant celui de la correction elle-même (J'utilise pour ces F.O. du papier cartonné capable de résister toute une année à de fréquentes manipulations).

"Cette F.O. n'est-elle pas traumatisante pour l'élève ?" Si l'objection vient d'un collègue qui "met des notes", je lui demande avec énergie de se poser d'abord à lui-même la même question à leur propos ! Sinon, je voudrais bien savoir en quoi consisterait une pédagogie totalement "non-traumatisante"...

A titre d'illustration, voici un extrait d'une F.O. d'élève de Seconde C (trait ondulé : appréciation générale ; DM : devoir à la maison ; DS : devoir surveillé) :

DM9 Discussions mal conduites
Tu ne te préoccupes pas assez de l'existence de ce que tu écris ; d'où des incohérences et des erreurs.
{ Moyen. Une même attitude, illogique, tout au long du devoir.

DS9 Ne confonds pas $\rightarrow$ et $\mapsto$
Equation $\neq$ Inéquation
Assez bien. Ce qui est traité est bien compris.

DM10 { Très bien

DS10 Que signifie "intervalle dans **R**" ?
Conjonction d'inéquations dans **R** : pense à la représentation graphique
Tu confonds f et f(x) : 3ème fois
$\longrightarrow$ Une erreur de calcul, due à une simplification trop tardive d'une fraction
{ Assez bien. Réfléchis aux 4 observations ci-dessus.

DM11 Tu confonds "il faut" et "il faut et il suffit" : 4e fois
$\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$ n'entraîne nullement $c > 0$
Erreurs en passant des vecteurs aux longueurs
{ Assez bien. Attention à la logique : si, ssi, etc.

DS11 Simplifie les fractions
Erreur sur la notion de degré d'un polynome
{ Bien

DM12 Tu confonds inconnues et paramètres
{ Assez bien

DS12 Tu confonds "application" et "application affine"
{ Très insuffisant

II) Variante.

J'ai moi-même expérimenté, avec mes élèves de prépa HEC Technique, une variante de la fiche d'observation.

Chaque fois que je trouvais une erreur dans un devoir, je remplissais une petite fiche du type de celles reproduites à la page 10. J'avais imaginé 4 types de fiches (matérialisées par des couleurs différentes) suivant le type d'erreur: erreur d'inattention, erreur de connaissance, erreur de raisonnement, erreur de calcul. La distinction peut paraître arbitraire, et elle l'est effectivement, mais dans la pratique ces différents types d'erreurs doivent conduire les élèves à différents types de travaux pour se corriger.

Pour chaque erreur (voir page 10), j'essayais de proposer un diagnostic et de proposer un "remède". Comme dans le cas de la fiche d'observation, il est difficile de juger de l'efficacité d'une telle méthode. Cependant, il est certain que ces fiches d'erreur ont eu un effet psychologique très positif sur mes élèves. D'autre part, elles m'ont obligé à réfléchir sur les causes de leurs erreurs, ce qui m'a semblé une expérience très enrichissante.

Pour finir, je signale que plusieurs enseignants de l'Académie de Lille ont expérimenté la fiche d'observation, notamment en classes de 5ème, 4ème et 3ème, durant l'année scolaire 82-83, et comptent poursuivre l'expérience qui leur a semblé positive. Il semblerait notamment que l'efficacité de la fiche d'observation pourrait être meilleure si l'enseignant, pour chaque erreur, renvoyait l'élève à un paragraphe du cours ou à un exercice déjà traité, ou encore à un exercice supplémentaire.

ERREURS D'INATTENTION

Devoir du 30/9/82. Exercice 2.

Erreur : Calcul inachevé. Vous donnez pour solutions de l'équation les deux racines carrées du discriminant.

Diagnostic : Vous avez perdu le fil de votre calcul ou vous avez recopié distraitement votre brouillon (plus probable)

Remède proposé : * Si vous avez perdu le fil de votre calcul, donnez des sous-titres qui vous permettent de vous y retrouver ; par exemple ici vous auriez pu donner comme sous-titres :

a) Calcul du discriminant
b) Calcul des racines carrées du discriminant
c) Calcul des racines de l'équation.

* Si vous avez mal recopié votre brouillon, faites-y attention pour une prochaine fois !

REN VOIRET

Recto ↑

Verso →

Fiche n° 1

ERREUR DE RAISONNEMENT

Devoir de proba du 17/3/83. Exercice n° 3.

$P(H) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Diagnostic : Vous avez utilisé, sans le dire et peut être sans y faire attention, la formule : $P(H) = P(\overline{G_A} \cap \overline{G_B}) = P(\overline{G_A}) \times P(\overline{G_B})$. Qui est fausse si G_A et G_B ne sont pas indépendants, ce qui est le cas ici.

Remède proposé : Faites attention aux formules sous-entendues que vous utilisez.

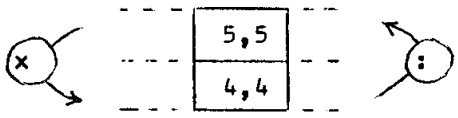
MICHELIN

Fiche n° 2

CHAPITRE 3 : UN EXEMPLE DE DIAGNOSTIC ET TRAITEMENT D'ERREUR SUR LES SUITES PROPORTIONNELLES.

Voici un premier exemple qui montrera, je l'espère, l'intérêt et les possibilités de l'analyse des erreurs en cours de mathématiques.

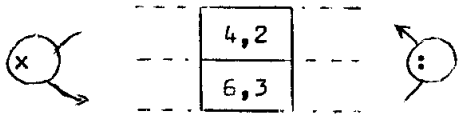
Certains enseignants du groupe IREM-Erreur de Villeneuve d'Ascq avaient constaté, en 6ème, l'erreur suivante: supposons que les élèves aient à trouver le multiplicateur pour la suite proportionnelle:



(suite A)

Dans ce problème, certains élèves, pour trouver le multiplicateur, effectuent la division $\frac{5,5}{4,4}$ et trouvent donc un multiplicateur égal à 1,25.

<u>Diagnostic de l'erreur</u>: Les enseignants du groupe ont remarqué d'autre part que les mêmes élèves ne commettent pas d'erreur dans le calcul du multiplicateur lorsque les termes de la suite du haut sont plus petits que ceux de la suite du bas, par exemple:



(suite B)

Notre diagnostic a donc été: ces élèves <u>refusent</u> de diviser un nombre par un nombre plus grand: dans le cas de la suite B, ils effectuent la division $\frac{6,3}{4,2}$ correcte. Dans le cas de la suite A, ils refusent la division $\frac{4,4}{5,5}$ pour lui substituer la division $\frac{5,5}{4,4}$.

Recherche des causes de l'erreur: La cause principale de cette erreur nous a semblé être que ces élèves ne maîtrisaient pas suffisamment la division des décimaux, notamment qu'ils n'avaient pas l'habitude de diviser un nombre par un nombre plus grand. Nous avons pensé, d'autre part, qu'il n'était pas possible de traiter ce problème sans traiter aussi son problème réciproque, à savoir la multiplication d'un nombre donné par un nombre inférieur à 1. Nous avons donc préparé, pour ces élèves, une fiche de travail visant à rétablir un vision correcte des effets des deux opérations ci-dessus. Cette fiche de travail est reproduite aux pages 14 et 15, et s'articule suivant les étapes suivantes:

Exercice 1: Il s'agit ici de faire remarquer à l'élève les effets de la multiplication par un nombre plus grand ou plus petit que 1. La remarque permet à l'élève de tirer lui-même sa conclusion.

Exercice 2: Il sert à vérifier que l'élève a bien assimilé ce qui est important dans l'exercice 1.

Exercice 3: Il sert à montrer à l'élève la possibilité et les effets de la division d'un nombre donné par un nombre plus grand.

Exercice 4: Analogue à l'exercice 2.

Exercice 5: Il vise à rappeler à l'élève les rapports entre multiplication et division: il s'agit ici de retrouver la multiplication à partir de la division.

Exercice 6: Le même que le précédent, mais l'élève doit trouver lui-même qu'il faut poser une division.

Exercice 7: Application au problème de départ, où se trouvait l'erreur.

Cette fiche a été expérimentée lors d'une séance de soutien, et a donné toute satisfaction, c'est à dire que les élèves concernés ont résolu correctement l'exercice 7, ce qui était le but de l'opération. Ceci confirme donc que notre diagnostic était correct et que nous avions déterminé la cause de l'erreur.

Nous n'avons pas vérifié si les effets de cette correction étaient définitifs, c'est à dire si la même erreur ne réapparaissait pas chez quelques élèves au bout d'un certain temps. Il est probable néammoins que d'autres exercices sur le même thème seraient utiles pour renforcer le résultat acquis, par exemple une semaine ou quinze jours après.

Quelques résultats étonnants.

I)

Nombre multiplié	Multiplicateur		Nombre multiplié	Multiplicateur		Nombre multiplié	Multiplicateur	
5,5	0,5	=	0,4	1	=	12,1	3	= ....
5,5	0,1	=	0,4	3,3	=	12,1	2,2	= ....
5,5	1,2	=	0,4	4,2	=	12,1	0,1	= ....
5,5	3,5	=	0,4	0,6	=	12,1	0,2	= ....
5,5	0,8	=	0,4	0,3	=	12,1	0,8	= ....

Mettre une croix dans les cases où le produit est inférieur au nombre multiplié.

Remarque: - A chaque fois que le multiplicateur est ..... à 1 le résultat de la multiplication est inférieur au .....
- A chaque fois que le multiplicateur est supérieur à .... le résultat de la multiplication est ..... au nombre multiplié.

II) Sans effectuer la multiplication, complète par " < " (plus petit que) ou par " > " (plus grand que):

25,2 x 0,5	....	25,2	0,7 x 2	....	0,7
3,8 x 1,25	....	3,8	0,7 x 0,3	....	0,7
6,2 x 1,414	....	6,2	1,2 x 0,5	....	0,5
			2,4 x 2	....	2

III)

Dividende (nombre divisé)	Diviseur		Dividende	Diviseur		Dividende	Diviseur	
3,2	2	=	8,1	0,9	=	0,24	6	= ....
3,2	5	=	8,1	3	=	0,24	1,2	= ....
3,2	8	=	8,1	27	=	0,24	0,2	= ....
3,2	0,4	=	8,1	20	=	0,24	0,1	= ....
3,2	16	=	8,1	9	=	0,24	2,4	= ....

Mettre une croix dans les cases où le quotient est inférieur à 1.

Remarque: Chaque fois que le diviseur est plus grand que le dividende le quotient est ..... à 1.

IV) Sans effectuer la division, complète par " < " (plus petit que) ou par " > " (plus grand que):

3,45 : 8	....	1	8,5 : 0,3	....	1
4,2 : 2	....	1	3,66 : 4,55	....	1
5,6 : 3,2	....	1	1,44 : 0,3	....	1
0,2 : 2	....	1	0,3 : 0,414	....	1

.../...

V) Effectue la division et utilise le résultat pour compléter la multiplication. Vérifie en effectuant la multiplication.

2,72 x .... = 6,8

4,2 x .... = 0,21

.... x 3,8 = 1,9

6,8 | 2,72

0,21 | 4,2

1,9 | 3,8

VI) Complète.
Indique l'opération que tu fais pour compléter ces égalités.
Et vérifie ton résultat en effectuant la multiplication.

3,5 x .... = 21

1,4 x .... = 2,8

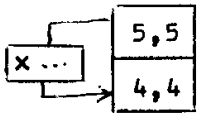
.... x 13,5 = 1,35

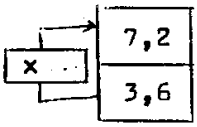
.... x 0,25 = 4

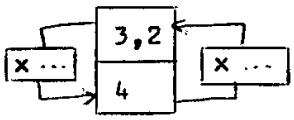
5 x .... = 0,2

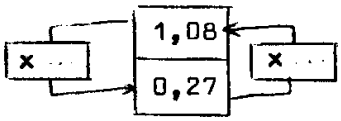
0,16 x .... = 0,8

VII) Ecrire l'opération te permettant de trouver le multiplicateur puis complète. Et vérifie cette multiplication.









CHAPITRE 4 : UN EXEMPLE DE DIAGNOSTIC ET TRAITEMENT D'ERREUR SUR LES EQUATIONS DU PREMIER DEGRE.

Dans le groupe IREM-Erreur d'Escaudain, nous nous sommes intéressés au problème des équations du premier degré à une inconnue, et en particulier à un type d'erreur qui s'y rencontre souvent: par exemple, pour résoudre l'équation

$x + 3 = 5$

certains élèves "font passer" le 3 dans l'autre membre, ce qui peut donner $x = \frac{5}{3}$ ou parfois $x = -\frac{5}{3}$. De même, pour l'équation $3x = 5$, on trouvera parfois $x = 2$ (5-3), ou $x = \frac{5}{-3}$.

<u>Diagnostic</u>: Le diagnostic de cette erreur n'est pas facile à établir, en l'absence d'autres éléments que le simple constat d'erreur. Pourtant, nous pouvons imaginer deux possibilités a priori: ou bien l'élève confond la multiplication et l'addition, ou bien il applique mécaniquement la règle assez floue consistant à "faire passer" un nombre dans l'autre membre en le changeant de signe (si on y pense). La fiche d'observation de l'élève doit permettre de décider entre ces deux possibilités: s'il s'agit d'une confusion entre addition et multiplication, il est probable que cela se sera déjà remarqué à l'occasion d'exercices de calcul algébrique.

Nous ne nous sommes pas intéressés à cette possibilité car elle ouvre un champ de problèmes beaucoup trop vaste pour lesquels un enseignant de 4ème peut, en fait, difficilement proposer des solutions: les lacunes ici sont trop graves et trop lointaines.

Pour travailler sur cette erreur, nous avons donc <u>supposé</u> qu'il s'agissait de l'application mécanique de la "règle" consistant à "faire passer".

Cause de l'erreur: Il nous a semblé que la cause d'une telle erreur était d'ordre pédagogique: cette règle a été imposée à l'élève prématurément, alors qu'il n'était pas capable de la dominer. On sait qu'en fait l'expression "faire passer" recouvre la possibilité d'ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'équation, et de multiplier ou diviser ces deux membres par un même nombre. La cause de l'erreur pourrait bien être que l'élève n'a pas dominé le passage des opérations de base à la règle qui permet d'accélérer les calculs.

Traitement de l'erreur: Pour agir sur la cause de l'erreur, nous avons donc décidé d'élaborer un traitement qui fait revenir l'élève aux opérations élémentaires: ajouter un même nombre aux deux membres de l'équation, ou les multiplier par un même nombre. Ce traitement s'est concrétisé sous la forme d'un programme en BASIC pour micro-ordinateur SHARP PC 1211 - il aurait été aussi possible d'en faire des fiches d'exercices - élaboré suivant les étapes suivantes:

a) Un programme de nombre au hasard propose une équation du type $x + a = b$ ou $ax = b$ à l'élève, le choix entre ces deux types d'équation étant également effectué au hasard. Dans ce programme, $-99 \leqslant a \leqslant 99$ et $-99 \leqslant b \leqslant 99$; de plus a et b sont entiers. Ensuite, l'ordinateur demande à l'élève de résoudre l'équation.

b) En se basant sur l'hypothèse que l'élève applique une "règle" erronée, l'ordinateur calcule lui-même les "solutions" possibles, c'est à dire: $x = b-a$, $x = \frac{b}{a}$, $x = b+a$, $x = \frac{a}{b}$, $x = ab$, ainsi que les opposés de ces solutions (correspondant à un changement de signe intempestif). Il y a donc, ici, simulation de l'erreur de l'élève, cette simulation étant basée sur une hypothèse (pour l'instant non testée) concernant ses procédés cognitifs.

c) L'ordinateur compare la réponse de l'élève à celles qu'il a calculées. Trois possibilités se présentent alors:

- L'élève donne la réponse juste. Dans ce cas l'ordinateur lui présente une autre équation. En principe ce cas ne doit pas se présenter au début du traitement.

- L'élève donne un réponse fausse correspondant à une des réponses fausses calculées par l'ordinateur; celui ci entame alors le traitement correctif (voir étape d).

- L'élève donne une réponse fausse ne correspondant pas à une des réponses fausses calculées par l'ordinateur; nous interprèterons ceci comme une erreur de calcul n'ayant aucun rapport avec la résolution de l'équation (par exemple, 18 + 27 = 55). Dans ce cas, l'ordinateur demande à l'élève de refaire son calcul et de donner une autre réponse.

d) Nous sommes donc ici dans le cas d'une erreur répertoriée par l'ordinateur. Celui-ci rappelle alors à l'élève les deux règles de base:

"Je crois que tu as utilisé une opération interdite. Les seules opérations autorisées sont:

1) Ajouter un même nombre aux deux membres de l'équation.

2) Multiplier les deux membres de l'équation par un même nombre".

Tout de suite après, l'ordinateur demande à l'élève:

"Quelle opération vas-tu effectuer ici? L'opération 1 ou l'opération 2?"

Cette étape doit permettre à l'élève d'analyser l'équation: est-elle de type "somme" ou de type "produit"?

e) Dans le cas où l'élève se trompe dans cette réponse (ce qui peut signifier qu'il confond addition et multiplication) l'ordinateur lui intime de "demander à son professeur de lui expliquer".

Dans le cas où l'élève donne la bonne réponse, l'ordinateur lui demande: "Par quel nombre vas-tu multiplier les deux membres de l'équation" ou (suivant les cas) "Quel nombre vas-tu ajouter aux deux membres de l'équation?"

f) Dans le cas où l'élève se trompe ici (ce qui peut signifier qu'il domine mal les problèmes d'inverse et d'opposé),

l'ordinateur le renvoie encore "à son professeur" .

Dans le cas où l'élève donne la bonne réponse, il doit normalement être au bout de ses peines, et l'ordinateur lui demande de donner sa solution. On se trouve alors ramené au début du programme, et l'ordinateur propose à l'élève une autre équation.

Vous trouverez ce programme à la page 21. Il est suivi d'un exemple de déroulement possible, avec la trace imprimée des différentes étapes parcourues par l'élève.

Nous n'avons pas expérimenté ce programme, car nous l'avons élaboré seulement à la fin de l'année scolaire 82-83. Ceci sera fait durant l'année scolaire 83-84. Il est à remarquer que ce programme, indépendamment de son rôle correctif pour un élève donné, peut aussi servir de <u>moyen d'étude</u> des processus de pensée de cet élève. En effet, l'étude de la trace laissée par l'ordinateur des différents essais de l'élève (du type de celle présentée plus loin) permettrait d'approcher sa façon de procéder et donc de confirmer ou infirmer certaines de nos hypothèses.

Pour clore ce chapitre, je voudrais revenir sur un sujet que j'avais seulement abordé dans l'introduction: l'étude des erreurs de nos élèves nous conduira souvent à une autocritique de notre enseignement initial. Dans le cas de l'erreur ci-dessus, à supposer que notre diagnostic et notre analyse soient corrects (ce qui reste à démontrer), il est clair qu'il faudrait renoncer à inculquer la règle du "faire passer" trop prématurément, et attendre que les élèves capables de la dominer la dégagent d'eux-mêmes à partir des exemples traités.

Dans le groupe IREM-Erreur de Cappelle-la-Grande, nous avons eu un autre exemple de ce genre: certains élèves avaient commis l'erreur $3^3 = -27$. Après réflexion, il est apparu que la cause de cette erreur était aussi d'ordre pédagogique. En cours, les enseignants qui avaient constaté l'erreur avaient donné la règle suivante: lorsqu'on élève un nombre négatif à une puissance paire, on obtient un nombre positif, et lorsqu'on élève un nombre négatif à une puissance impaire, on obtient un nombre négatif. Probablement ici l'élève appliquait cette "règle", en oubliant

qu'elle s'applique à un nombre négatif. A partir de là, il est légitime de se demander s'il est bien utile d'énoncer cette règle aux élèves, et s'il ne vaudrait pas mieux la laisser mûrir jusqu'à ce qu'ils la trouvent eux-mêmes.

Ce genre d'exemple me semble tout à fait représentatif de ce qu'Alain Bouvier appelle "la formation des automaths" [5].

PROGRAMME BASIC SUR LES EQUATIONS DU PREMIER DEGRE.

(Génération de l'équation)

```
1: D = 12345678
2: GOSUB 500 : G = D/2 : H = 1
3: IF G = INT G THEN 5
4: H = 0
5: A = INT (100*(2*D/E - 1)) : GOSUB 500 : B = INT (100*(2*D/E - 1))
20 : PRINT "RESOUDRE␣␣␣␣␣␣␣␣L/EQUATION␣:" : PRINT "␣"
21 : IF H = 0 THEN 51
30 : IF A > 0 THEN 50
40 : C = -A : PRINT "X␣-␣" ; C ; "␣=␣"; B : GOTO 59
50 : PRINT "X␣+␣" ; A ; "␣=␣" ; B : GOTO 59
51 : PRINT A ; "X␣=␣"; B
```

(Calcul des solutions et des fausses solutions)

```
59 : PRINT "␣" : Y = B-A : W = B/A : V = A+B : T = A/B : U = A*B
```

(Réponse de l'élève et test de celle-ci)

```
60 : PRINT "QUAND␣TU␣AURAS␣␣TROUVE␣LA␣SOLU-␣TION,␣TAPE-LA␣␣␣SUR␣
LE␣CLAVIER,"
61 : GOSUB 600
70 : INPUT "SOLUTION:␣X=␣";X
79 : IF H=0 THEN 82
80 : IF X=Y THEN 190
81 : GOTO 90
82 : IF X = W THEN 190
83 : IF X = Y THEN 200
90 : IF X = -Y THEN 200
100 : IF X = W THEN 200
110 : IF X =-W THEN 200
120 : IF X = V THEN 200
130 : IF X = -V THEN 200
140 : IF X = T THEN 200
150 : IF X = -T THEN 200
160 : IF X = U THEN 200
170 : IF X = -U THEN 200
```

```
    (Erreur de calcul)
180 : PRINT "REPONSE␣FAUSSE.␣REFAIS␣TES␣␣␣␣␣␣CALCULS,␣ET":GOTO 60
    (Réponse exacte)
190 : PRINT "REPONSE␣EXACTE,␣ON␣RECOMMENCE" : PRINT "␣":GOTO 2
    (Rappel à l'élève des opérations autorisées)
200 : PRINT "REPONSE␣FAUSSE.␣JE␣CROIS␣QUE␣TU␣AS␣UTILISE␣UNE␣␣
OPERATION␣INTER-"
210 : PRINT "DITE.␣LES␣SEULESOPERATIONS␣AUTO-RISEES␣SONT:" :
PRINT "␣"
220 : PRINT "1)␣AJOUTER␣UN␣␣␣MEME␣NOMBRE␣AUX␣DEUX␣MEMBRES␣DE␣
L/EQUATION." : PRINT "␣"
230 : PRINT "2)␣MULTIPLIER␣␣␣LES␣DEUX␣MEMBRESDE␣L/EQUATION␣␣␣
PAR␣UN␣MEME"
231 : PRINT "NOMBRE." : PRINT "␣"
    (Détermination de l'opération à utiliser: somme ou produit)
240 : PRINT "QUELLE␣OPERATIONVAS-TU␣EFFECTUERICI?␣TAPE␣1␣OU␣2" :
GOSUB 600
250 : INPUT "OPERATION␣NUMERO␣" ; R
251 : IF H = 0 THEN 330
260 : IF R = 1 THEN 280
270 : GOSUB 700 : GOTO 250
280 : PRINT "OUI.␣QUEL␣NOMBREVAS-TU␣AJOUTER␣␣AUX␣DEUX␣MEMBRES"
281 : GOSUB 800
290 : INPUT "J/AJOUTE␣" ; R
300 : IF R = -A THEN 320
310 : GOSUB 700 : GOTO 290
320 : PRINT "EXACT.MAINTENANT" : GOTO 60
330 : IF R = 1 THEN 270
340 : PRINT "OUI.␣PAR␣QUEL␣␣␣NOMBRE" : PRINT "MULTIPLIES-TU␣␣␣
LES␣DEUX␣MEMBRES"
349 : GOSUB 800
350 : INPUT "JE␣MULTIPLIE␣PAR" ; R
360 : M = 1/A : IF R = M THEN 320
370 : GOSUB 700 : GOTO 350
    (Sous-programmes)
500 : E = E8 + 1 : F = 23*D : D = F - INT (F/E)*E : RETURN
```

```
600 : PRINT "PUIS␣APPUIE␣SUR␣LA␣TOUCHE␣ENTER" : PRINT "␣":RETURN
700 : PRINT "NON.␣DEMANDE␣A␣␣TON␣PROFESSEUR␣␣DE␣T/EXPLIQUER" :
PRINT"␣" : RETURN
800 : PRINT "TAPE␣LE␣NOMBRE" : GOSUB600 : RETURN
```

<u>Exemple de déroulement possible du programme ci-dessus.</u>

RESOUDRE
L/EQUATION :

X + 32. = 24.

QUAND TU AURAS TROUVE LA SOLUTION, TAPE-LA SUR LE CLAVIER, PUIS APPUIE SUR LA TOUCHE ENTER

REPONSE FAUSSE. REFAIS TES CALCULS, ET QUAND TU AURAS TROUVE LA SOLUTION, TAPE-LA SUR LE CLAVIER, PUIS APPUIE SUR LA TOUCHE ENTER

(Réponse de l'élève : $\frac{24}{32}$ simplifié en $\frac{4}{7}$)

REPONSE FAUSSE. JE CROIS QUE TU AS UTILISE UNE OPERATION INTERDITE. LES SEULES OPERATIONS AUTORISEES SONT:

(Réponse de l'élève : $\frac{24}{32}$ simplifié en $\frac{3}{4}$)

1) AJOUTER UN MEME NOMBRE AUX DEUX MEMBRES DE L/EQUATION.

2) MULTIPLIER LES DEUX MEMBRES DE L/EQUATION PAR UN MEME NOMBRE.

QUELLE OPERATION VAS-TU EFFECTUER ICI? TAPE 1 OU 2 PUIS APPUIE SUR LA TOUCHE ENTER

NON. DEMANDE A TON PROFESSEUR DE T/EXPLIQUER

(Réponse: Opération n° 2)

OUI. QUEL NOMBRE VAS-TU AJOUTER AUX DEUX MEMBRES DE L/EQUATION? TAPE LE NOMBRE PUIS APPUIE SUR LA TOUCHE ENTER

EXACT. MAINTENANT QUAND TU AURAS TROUVE LA SOLUTION, TAPE-LA SUR LE CLAVIER, PUIS APPUIE SUR LA TOUCHE ENTER

(Réponse: -32)

REPONSE EXACTE, ON RECOMMENCE

(Réponse: X = -8)

CHAPITRE 5 : UN EXEMPLE DE DIAGNOSTIC ET TRAITEMENT D'ERREUR DANS LE CALCUL DES ENSEMBLES DE DEFINITION DES FONCTIONS.

Il y a trois ans, j'ai eu à m'occuper d'une erreur commise par mes élèves de HEC Technique dans le calcul d'ensembles de définition. Il s'agissait de l'erreur suivante: soit à calculer, par exemple, l'ensemble de définition de la fonction

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad .$$

En guise de réponse, certains élèves écrivaient: $D_f = \mathbb{R}_+$.

Cette erreur m'a posé des problèmes pendant longtemps, car je n'arrivais pas à comprendre qu'on fasse une erreur dans un problème aussi simple. Une autre erreur du même genre, à laquelle j'ai eu affaire en Première G2, est la suivante:

Si $x \geqslant 0$, $|x - 2| = x - 2$, et si $x < 0$, $|x - 2| = -x + 2$.

Ces deux types d'erreur ont, en fait, la même cause, que j'ai découverte plus tard dans l'année, au moment du calcul des dérivées. Les mêmes élèves qui n'arrivaient pas à calculer l'ensemble de définition de la fonction f ci-dessus, n'arrivaient pas non plus à appliquer le théorème donnant la dérivée d'une fonction composée. En fait, ces élèves <u>ne voyaient pas</u> que, pour calculer $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$, on calcule d'abord $x^2 - 3x + 2$, et qu'ensuite on prend la racine carrée du résultat obtenu. Ils ne savaient pas reconnaître une fonction composée.

A la réflexion, il m'est apparu en effet que je leur avais parlé abondamment de composition des applications, faisant composer des applications simples pour obtenir des applications plus compliquées, mais je n'avais pas parlé de <u>décomposition</u> des applications. L'année suivante, j'ai inclus la décomposition

des applications dans mon cours du début de l'année, avec application immédiate au calcul des ensembles de définition (voir ci-dessous). Je n'ai plus revu cette erreur depuis, sauf quelques apparitions épisodiques (rémanence) dûes à l'inattention ou à la fatigue. Comme prévu, les difficultés avec la dérivation des fonctions composées ont également disparu.

DECOMPOSITION DES APPLICATIONS (EXTRAIT DE [6]).

3) Décomposition d'une application.

Nous avons vu au paragraphe précédent comment on compose les applications. Or, très souvent, dans la pratique, c'est l'opération inverse dont nous aurons besoin: décomposer une application ou une fonction en fonctions plus simples. Voici comment on peut procéder.

Considérons par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Supposons que j'aie une machine à calculer, et que je veuille calculer f(x) pour une valeur de x donnée (par exemple, x=3). J'effectuerai successivement les opérations suivantes:

(1) Je calcule x^2. 9

(2) J'ajoute 1 au résultat obtenu. 10.

(3) Je prends l'inverse du résultat obtenu. 0,1.

En quoi consiste l'opération (3)? Je prends l'inverse du résultat obtenu, c'est à dire que je transforme le résultat obtenu par la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$.

Je peux donc considérer que f(x) se calcule de la façon suivante:

$$x \xmapsto{h} x^2+1 \xmapsto{g} \frac{1}{x^2+1}$$

Nous voyons donc que f peut s'écrire sous la forme d'une fonction composée: $f = g \circ h$. Nous avons décomposé f.

Cette méthode de décomposition est très générale, et peut servir pour trouver l'ensemble de définition d'une fonction ou pour calculer certaines dérivées (voir exercice 10):

Méthode 11 Pour décomposer une fonction f en fonctions plus simples, on imagine que l'on doit calculer f(x) au moyen d'une calculatrice, et on écrit les opérations successives à utiliser.

Exercice 10: Déterminer l'ensemble de définition de:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1 - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 2}} .$$

Solution: Pour ne pas oublier de conditions, décomposons la fonction f; en ne gardant que les opérations les plus importantes, pour calculer f(x):

(1) Je calcule (x^2+1);

(2) Je calcule $x^4 - 3x^2 + 2$;

(3) Je prends la racine carrée du résultat obtenu en (2).

(4) J'ajoute les résultats de (1) et de (3).

(5) Je prends l'inverse du résultat obtenu en (4).

Pourquoi cette décomposition va-t-elle nous servir? Rappelons-nous que l'ensemble de définition de f est l'ensemble des x pour lesquels je peux calculer f(x); il me suffit donc de regarder à quelles conditions je peux effectuer les opérations (1) à (5).

(1) peut être effectuée $\forall x$.

(2) également.

(3) Pour pouvoir effectuer (3), je dois prendre la racine carrée du résultat de (2). Le résultat de (2) doit donc être positif ou nul; donc je dois avoir: $x^4 - 3x^2 + 2 \geqslant 0$. Voici une première condition.

(4) peut être effectuée sans aucun problème.

(5) Pour effectuer (5), il faut que le résultat obtenu en (4) soit différent de 0 (je dois l'inverser); donc je dois avoir $x^2+1-\sqrt{x^4-3x^2+2} \neq 0$. Voici une deuxième condition.

Je n'ai pas d'autre condition à étudier.

a) On factorise $x^4 - 3x^2 + 2 = (x-1).(x+1).(x-\sqrt{2}).(x+\sqrt{2})$. (Il s'agit d'une expression bicarrée). En faisant un tableau de signes, on voit que la première condition obtenue est équivalente à: $x \in]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [-1,+1] \cup [\sqrt{2},+\infty[$.

b) Un calcul très simple montre que la deuxième condition est équivalente à $x \neq \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $x \neq -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

En réunissant les résultats de a) et b), nous obtenons donc:

$$\mathcal{D}_f =]-\infty,-\sqrt{2}] \cup [-1,-\frac{1}{\sqrt{5}}[\cup]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{5}}, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[.$$

CHAPITRE 6 : CONCLUSIONS (PROVISOIRES) ET PROPOSITIONS.

J'espère avoir montré l'intérêt de l'analyse des erreurs des élèves dans notre pratique d'enseignants de mathématiques. Il est bien évident que ce travail est incomplet, et qu'il ne s'agit là que d'une ébauche. Il s'agit de voir maintenant comment nous pourrions le développer.

Nous avons abordé, dans les groupes IREM-Erreur qui ont fonctionné durant cette année scolaire (82-83), le problème des erreurs dans de nombreux domaines, notamment: calcul des fractions, calcul algébrique, proportionnalité, équations du premier degré, manipulation des exposants, nombres relatifs, etc.

Il est apparu que le principal problème dans l'analyse des erreurs apparaissant dans ces différents domaines est que nous ne disposons d'aucune information sur les processus mentaux des élèves qui les commettent.. Dans les exemples que j'ai donnés plus haut, le diagnostic paraissait relativement facile, et conduisait à un traitement court, simple à appliquer, et permettant de vérifier (éventuellement) que le diagnostic était bon. Par contre, dans d'autres domaines (par exemple le calcul algébrique), on se trouve confronté à des erreurs tellement abracadabrantes (a priori) qu'il est bien difficile d'en trouver les causes.

Pour cette raison, ce travail doit se développer, durant l'année scolaire 83-84, par la collecte d'informations sur les processus mentaux des élèves fautifs, directement auprès d'eux. Cette collecte pourra s'effectuer au moyen d'<u>entretiens</u> avec ces élèves, suivant la technique de la <u>réflexion parlée</u> (voir par exemple [2], p. 66 et suivantes, ou [3], p. 117 et suivantes). Nous essayerons de discuter avec certains élèves ayant commis une erreur donnée, en leur proposant un

exercice du même type que celui où ils ont commis cette erreur. Ces discussions seront enregistrées au magnétophone. Retranscrites par écrit, elles fourniront - en principe - des informations permettant de mieux approcher certains types d'erreurs, de voir sur quels obstacles butent les élèves, de remonter enfin aux causes de ces erreurs.

Pour ce qui concerne plus particulièrement le calcul des fractions, il existe un abondant matériel [4], consistant en une analyse de la matière (quelles sont les différentes étapes à acquérir pour maîtriser le calcul des fractions?) et en entretiens avec des élèves en difficulté. Ce travail a conduit A. Bonboir à proposer une série de cahiers autocorrectifs, dont elle a pu démontrer l'efficacité. Il serait intéressant qu'un groupe IREM-Erreur se penche sur l'étude de ce travail, de façon à l'adapter à nos classes sous une forme à déterminer, d'une part, et d'autre part à voir comment éviter, préventivement, certaines erreurs.

Enfin, je pense qu'il est intéressant de continuer à étudier le problème de la <u>simulation</u> de certaines erreurs au moyen d'un ordinateur (voir chapitre 4). D'abord, cela peut permettre une certaine approche (ou modèle) des processus mentaux de certains élèves (pour une discussion de ce problème, voir [7]). De plus, ce genre d'études pourrait avoir des applications intéressantes dans la fabrication des logiciels. Par exemple, un logiciel d'exercices sur les équations du premier degré gagnerait certainement en efficacité s'il était capable d'analyser les erreurs des élèves qui le manipulent, et de leur proposer, au coup par coup, une correction adaptée.

Voila, j'ai terminé. Naturellement, toutes les remarques, critiques et suggestions seront les bienvenues.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] : APMEP: "Mathématique active en seconde". Brochure de l'APMEP n° 43, 1981.

[2] : Anna Bonboir: "La pédagogie corrective". Collection "L'éducateur", P.U.F., 1970.

[3] : Anna Bonboir: "Initiation à l'étude rationnelle du travail des écoliers". Editions Vander, Louvain, 1970.

[4]: Anna Bonboir: "Essai d'une méthodologie de l'étude des fractions". Thèse, Université de Louvain, 1959.

[5] : Alain Bouvier: "Que nous apprennent les erreurs de nos élèves". Bulletin de l'APMEP n° 335, 1982.

[6] : Daniel Duverney: "Cours d'introduction aux méthodes de résolution des problèmes", IREM de Lille, 1981.

[7] : Guy Karnas: "Simulation et étude différentielle de la résolution des problèmes". Monographies françaises de psychologie. Editions du CNRS.

[8] : Nadine Milhaud: "Le comportement des maîtres face aux erreurs des élèves". IREM de Bordeaux.