PROCEDURES, CONNAISSANCES,
APPRENTISSAGE DE LA REFLEXION MATHEMATIQUE

Daniel Duverney
28 avril 2008

Ce texte reprend le diaporama d'introduction à l'atelier que j'ai animé lors du colloque *Qu'est-ce que la recherche en mathématiques aujourd'hui* ?, organisé par la *Cité des géométries* les 6, 7 et 8 mars 2008 à Maubeuge .

Cet atelier se proposait, selon les termes du programme du colloque, de *s'interroger sur l'opposition un peu artificielle qui s'est développée depuis quinze ans, au niveau institutionnel, entre apprentissage de procédures et accumulation de connaissances, d'une part, et recherche de problèmes, d'autre part*.

Ainsi, la principale question posée était-elle la suivante : *quel rôle les procédures et connaissances jouent-elles dans les processus de recherche et de réflexion en mathématiques, y compris à un niveau "élémentaire"* ?

Pour éclairer cette question et amorcer le débat, il m'a semblé qu'un des résultats les plus anciens et les plus célèbres de la recherche en mathématiques, le théorème de Pythagore, pouvait constituer un bon point de départ.

En effet, j'ai souhaité poser certains des problèmes de la recherche en mathématiques de manière accessible, non seulement à des mathématiciens professionnels (chercheurs, enseignants et enseignantes des collèges et lycées, etc), mais aussi à un public plus large (pédagogues, philosophes, politiques, etc).

1. Une démonstration classique du théorème de Phytagore

Tout le monde connaît l'énoncé du théorème de Pythagore :

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Avec le triangle rectangle ABC de la figure 1, le théorème de Pythagore s'écrit $c^2 = a^2 + b^2$.

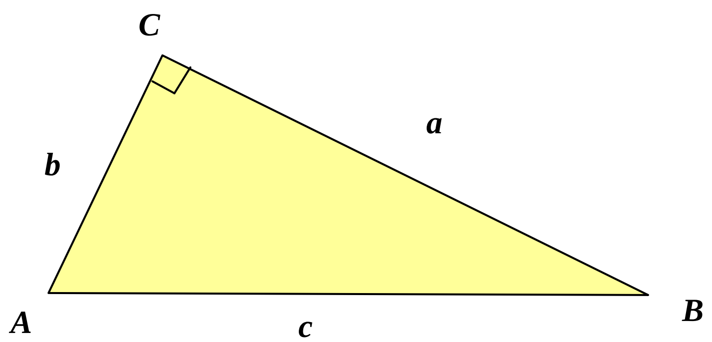

Figure 1

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore (près de deux cents, dit-on). L'une d'entre elles est basée sur la figure 2 (page suivante), qui s'obtient ainsi : on fait tourner le triangle ABC d'un quart de tour vers la droite, et on vient ajuster ce deuxième triangle AFA' verticalement en A. Une nouvelle rotation d'un quart de tour vers la droite donne un troisième triangle $A'EB'$, qui vient à son tour s'ajuster horizontalement en A'. Enfin, une dernière rotation d'un quart de tour vers la droite donne le triangle $B'BD$, qui vient s'ajuster verticalement, en haut en B' et en bas en B.

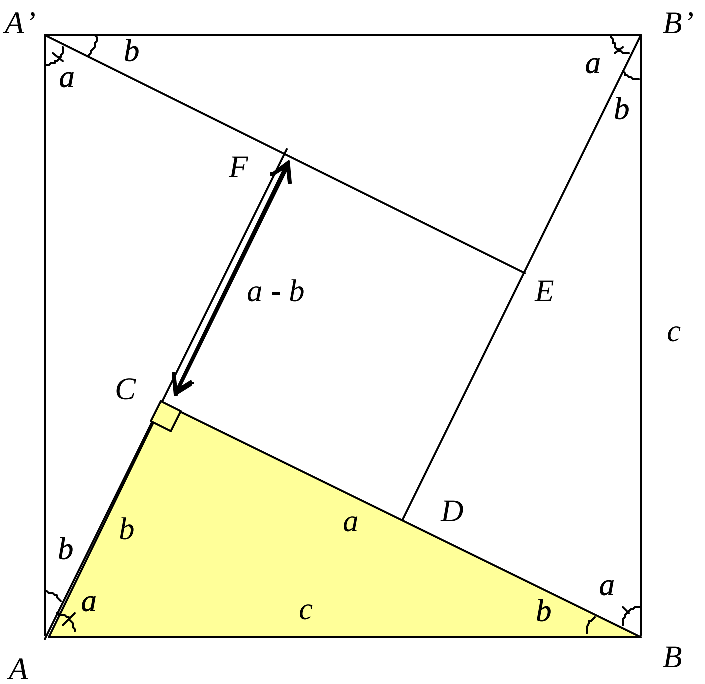

Figure 2

La figure obtenue après ces opérations présente de plaisantes symétries. En fait, on "voit" aisément que :

a) Le quadrilatère $ABB'A'$ construit sur le triangle ABC est un carré de côté c.
b) Le quadrilatère $CDEF$ qui apparaît au centre de la figure est également un carré. Son côté vaut $AF - AC = a - b$.
c) La surface du grand carré $ABB'A'$ est la somme de la surface du petit carré $CDEF$ et de 4 fois la surface du triangle ABC.

Donc $c^2 = (a-b)^2 + 4.\frac{1}{2}ab = (a^2 - 2ab + b^2) + 2ab = a^2 + b^2$. C'est le théorème de Pythagore.

2. De nombreux prérequis

Cette démonstration du théorème de Pythagore paraît très "simple". De fait, on pourrait imaginer qu'il suffit de disposer de quatre triangles rectangles identiques, en bois par exemple ; avec leur aide et après un peu de réflexion, un novice en la matière parviendrait à reconstituer la figure 2 (qui présente de réelles qualités esthétiques), à l'interpréter comme nous l'avons fait, pour peut-être découvrir à partir d'elle le théorème de Pythagore.

Il n'en est pourtant probablement rien, car l'interprétation de cette figure nécessite de nombreux prérequis.

Prérequis 1 : Dans le triangle rectangle ABC, la somme des angles α et β vaut 90° (figure 3).

Ce prérequis est nécessaire ; il garantit en effet que les quatres triangles vont s'ajuster convenablement aux angles A, A', B', B, de telle sorte que le quadrilatère $AA'B'B$ possède quatre angles droits.

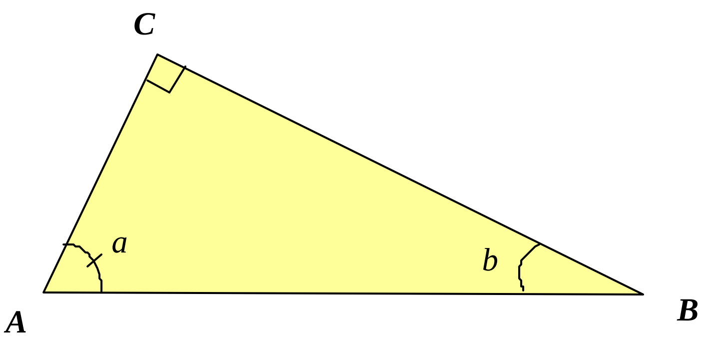

Figure 3

Ce premier prérequis n'est en rien évident, même à partir de l'observation. Il résulte d'un deuxième prérequis.

Prérequis 2 : Dans un triangle ABC quelconque, la somme des angles intérieurs $\alpha + \beta + \gamma$ vaut 180° (figure 4).

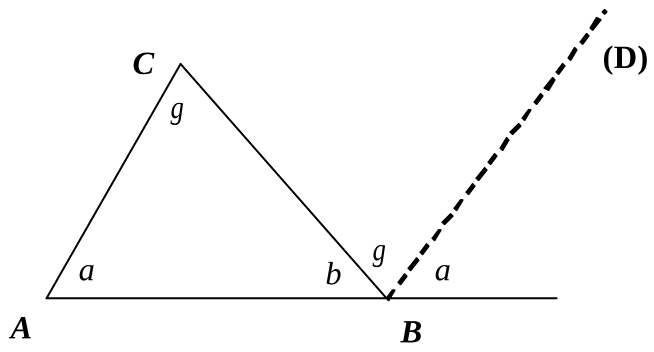

Figure 4

Ce deuxième prérequis n'est pas plus évident que le premier (qui s'en déduit en prenant $\gamma = 90°$). Il ne se comprend que par sa démonstration, qui nécessite une construction auxiliaire et d'autres prérequis.

La construction auxiliaire est celle de la droite (D) passant par B et parallèle à la droite AC , indiquée sur la figure 4 en pointillés. La possibilité de cette construction est "intuitivement évidente". Pourtant, mathématiquement, elle ne l'est pas, et nécessite également un prérequis.

Prérequis 3 : Par tout point du plan on peut mener une et une seule parallèle à une droite donnée.

Ce prérequis est le fameux *postulat des parallèles* ; il est à la base de la géométrie euclidienne et ne se démontre pas. Mieux, on peut construire des géométries où il n'est pas vrai.

La construction de la droite (D) de la figure 3 étant effectuée, nous avons besoin pour calculer la somme des angles intérieurs du triangle ABC d'un résultat sur les angles découpés par une sécante sur deux parallèles.

Prérequis 4 : Les angles alternes-internes formés par une sécante et deux droites parallèles sont égaux (voir figure 5).

Ce résultat est *intuitivement évident* : il se *voit* sur la figure. Il est néammoins nécessaire de le connaître si on veut aboutir au prérequis 2. De fait, les droites parallèles AC et (D) de la figure 4 font apparaître deux couples d'angles égaux à α et γ respectivement. Il devient donc *évident* que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

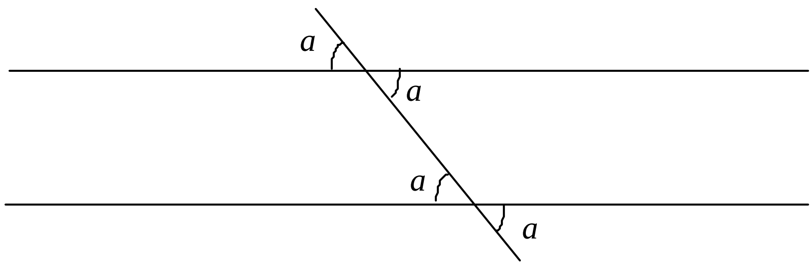

Figure 5

Les prérequis 1, 2, 3 et 4 nous garantissent que les quadrilatères $ABB'A'$ et $CDEF$ (fig. 2) ont chacun 4 angles droits.

Prérequis 5 : Un quadrilatère qui a quatre angles droits est un *rectangle*.

Ceci peut être regardé comme la *définition* d'un rectangle.

Prérequis 6 : La *surface* d'un rectangle est égale au produit de sa longueur par sa largeur (voir figure 6).

Le pavage qui apparaît figure 6 montre que ce prérequis peut être considéré également comme une *définition* : celle de la surface d'un rectangle, qui s'obtient par un carrelage.

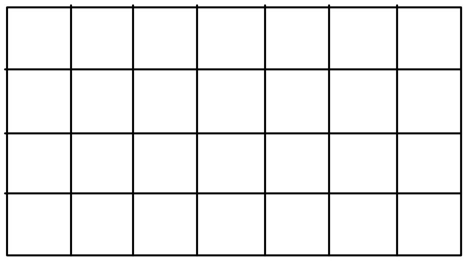

Figure 6

A partir de celle-ci, il est facile de définir la surface d'un triangle rectangle. Mais celle-ci gagne à être *connue* : sinon, comment la *reconnaître* lorsqu'elle se présente dans la figure 2 ?

Prérequis 7 : La surface du triangle rectangle ABC est la moitié de celle du rectangle $AC'BC$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}ab$.

Ceci résulte directement du découpage de la figure 7.

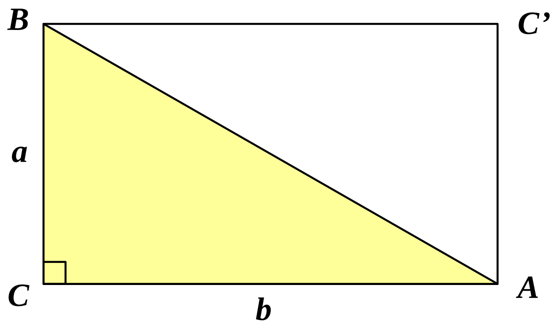

Figure 7

On notera que cette formule fournit une *procédure* pour calculer la surface d'un triangle rectangle ; elle se généralise sans grande difficulté au calcul de la surface d'un triangle quelconque. Si on ne connaît pas cette formule, c'est-à-dire si on ne connaît pas cette *procédure simple* pour trouver la surface de ABC, il devient *très difficile* d'arriver à la démonstration du théorème de Pythagore, que ce soit pour la comprendre ou, objectif plus ambitieux, la redécouvrir.

Le théorème de Pythagore est maintenant presque démontré. La figure 2 est explicitée et clarifiée, et la décomposition du grand carré en quatre triangles rectangles identiques et un petit carré permet d'écrire :

$$c^2 = 4.\frac{1}{2}ab + (a-b)^2.$$

Il reste à développer $(a-b)^2$, ce qui nécessite un dernier prérequis, et non des moindres.

Prérequis 8 : L'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, qui peut s'obtenir de deux façons :

Une démonstration algébrique qui utilise la distributivité de la multiplication sur l'addition.
Des considérations géométriques liées aux prérequis 5, 6, 7, à partir de la figure 8 ci-dessous :

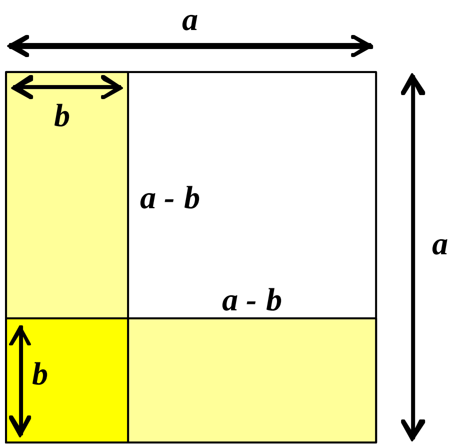

Figure 8

Nous passons sur les détails des démonstrations.

Le grand nombre de prérequis mis en évidence montre la complexité de cette démonstration et les qualités dont il a fallu faire la preuve pour l'élaborer. En fait, il semblerait que la compréhension ou la découverte de cette démonstration soient intimement liées à la maîtrise *préalable* d'un grand nombre de connaissances et procédures.

3. Une découverte "expérimentale" ?

La découverte du théorème de Pythagore, historiquement, semble présenter un aspect "expérimental" marqué.

On sait notamment qu les égyptiens de l'Antiquité utilisaient déjà, pour déterminer très pratiquement des angles droits dans leurs mesures de terrains et leur architecture, la "corde à treize noeuds". Celle-ci, lorsque joint les deux noeuds extrêmes, fournit le triangle pythagoricien le plus simple, le triangle 3-4-5 (figure 9).

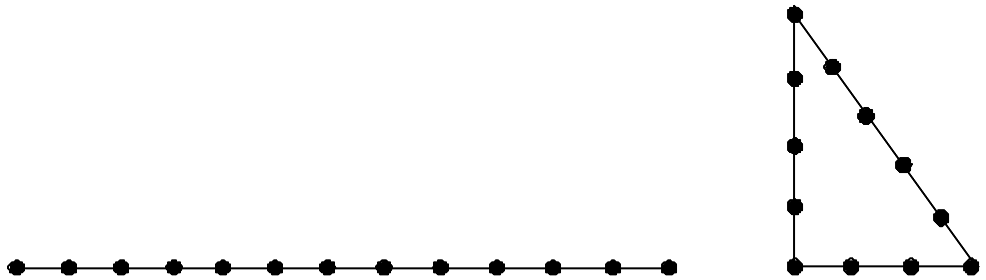

Figure 9

Dans un but pédagogique, on pourrait également imaginer de distribuer à des novices des bâtonnets de différentes longueurs, qui pourraient s'utiliser pour former, par tâtonnements, des triangles rectangles.

Mais découvrir le théorème de Pythagore par de tels dispositifs "pratiques" n'est certainement pas *évident*. Voici en effet les valeurs des premiers triplets pythagoriciens, c'est-à-dire des nombres entiers les plus simples qui donnent des triangles rectangles :

a	3	5	7	15
b	4	12	24	8
c	5	13	25	17

La première colonne correspond à la corde à 13 noeuds ; le triangle rectangle suivant a des longueurs de côtés égales à 5, 12 et 13 respectivement (colonne 2). Le suivant, 7, 24 et 25. Découvrir le théorème de Pythagore à partir de l'observation de ces données nécessite d'abord de connaître les carrés des entiers les plus simples, puis de disposer d'une telle connaissance des nombres qu'on "remarque" que $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$.

Autrement dit, une *familiarité considérable* avec les propriétés élémentaires des nombres les plus petits paraît nécessaire, et une introduction "expérimentale" telle que celle que nous venons de décrire ne paraît pas plus simple que l'introduction plus "théorique" présentée dans la section 1.

Elle présente par contre l'inconvénient de ne pas fournir de piste de *justification* (et encore moins de *démonstration*) du théorème de Pythagore. En effet, il s'agit ici d'une démarche *empirique*, fondée sur l'observation d'un nombre réduit de cas ; cette observation ne saurait tenir lieu de preuve. Elle donne seulement des *indications* à un observateur extrêmement sagace.

4. Quelques remarques (à discuter) pour conclure cette introduction

Nous présentons ici quelques éléments de conclusion, essentiellement en vue d'objectifs pédagogiques. La loi d'orientation de 1989 a été largement fondée sur une "rénovation pédagogique" visant à "former des têtes bien faites plutôt que des têtes trop pleines". D'une certaine façon, cette conception de l'éducation *oppose* la maîtrise de connaissances et de procédures aux capacités d'invention et d'innovation. Ainsi, l'invention et la découverte par l'élève devraient prendre le pas sur la parole du maître ; l'*activité* de l'élève devrait devenir le principal moteur de l'éducation, en évitant autant que possible, voire complètement, le cours magistral.

Il n'est pas dans mes intentions de discuter ici en détail de ces conceptions. Je me contenterai d'examiner rapidement si le cas ”élémentaire” du théorème de Pythagore permet de fournir quelques éléments d’information sur les processus de recherche et de découverte en mathématiques. Les remarques ci-dessous ne doivent donc pas être prises pour des affirmations démontrées, mais pour des hypothèses soumises à examen et discussion :

a) La **découverte** d’un résultat mathématique, aussi ”basique” soit-il, nécessite des **prérequis**. Ces prérequis, constitués de connaissances, procédures et méthodes, doivent être **mobilisables** pour pouvoir être utilisés au bon moment.

b) **La recherche en mathématiques et l’obtention de résultats nouveaux** (au moins pour le chercheur) **résulte de la conjonction d’idées nouvelles et de résultats antérieurs mobilisés au bon moment**. Il n’y a pas d’opposition entre **connaissances** et **inventivité**.

c) Une étude empirique (ou **expérimentale** dans le sens assez restreint d’**observation**) est parfois nécessaire, mais ne nécessite pas moins de connaissances antérieures.

d) Les activités de recherche sont donc **difficiles** ; elles demandent en outre beaucoup de **temps**, à la fois pour la mobilisation des connaissances antérieures pertinentes et pour la naissance de l’eurêka.

e) **Beaucoup de gens n’aiment pas chercher**. En effet, un grand nombre de problèmes de la vie courante ou professionnelle se résolvent grâce à des **procédures**, et la vie est courte.

f) **Une pédagogie fondée sur la découverte se heurtera donc à trois obstacles** : le manque de temps lié aux situations scolaires, la difficulté de la recherche (qui risque de décourager ceux qui ne trouvent pas), et le désintérêt pour l’effort de recherche. Ces trois obstacles risquent d’engendrer à terme une **passivité** bien plus importante que le cours magistral.

g) **La résolution de problèmes inédits** (ne relevant pas de l’application de procédures préétablies) est une part importante de l’activité mathématique et doit donc trouver sa place dans l’enseignement, mais en complément de l’**acquisition de connaissances et de procédures mobilisables**.