

Table des matières

Chapitre 1 : Fonctions eulériennes	1
1.1 Fonction gamma	1
1.1.1 Définition et relation fonctionnelle	1
1.1.2 Symbole de Pochhammer	2
1.2 Fonction bêta	3
1.3 Formule de duplication	4
1.4 Formule de Gauss	5
1.5 Formule de Weierstrass	6
1.6 Formule des compléments	8
Exercices du chapitre 1	12
Chapitre 2 : Fonction polygamma	15
2.1 Fonction digamma	15
2.1.1 Définition et développement en série	15
2.1.2 Représentations intégrales	17
2.1.3 Formule de Binet	18
2.1.4 Formule de Stirling	21
2.1.5 Fonction polygamma	22
2.2 Séries de fractions rationnelles	22
2.2.1 Expression à l'aide de la fonction digamma	22
2.2.2 Quelques séries remarquables	25
2.3 Nombres de Bernoulli et d'Euler	26
2.3.1 Nombres de Bernoulli	26
2.3.2 Nombres d'Euler	28
2.4 Développements asymptotiques	29
2.4.1 Transformation de Laplace	29
2.4.2 Développement asymptotique de la fonction gamma	31
2.5 Fonction zêta	32
2.5.1 Fonction zêta de Riemann	32
2.5.2 Fonction zêta de Hurwitz	34

Exercices du chapitre 2	36
Chapitre 3 : Fonctions hypergéométriques	39
3.1 Séries et fonctions hypergéométriques	39
3.2 Fonctions hypergéométriques usuelles	42
3.2.1 Cas où $s = 0$	42
3.2.2 Cas où $s = 1$	42
3.2.3 Fonction sinus intégral	43
3.3 Fonctions hypergéométriques modifiées	44
3.4 Dérivées et équations différentielles	45
3.5 Prolongement analytique lorsque $r = s + 1$	47
3.6 Relations de contiguïté	49
3.7 Confluence	51
3.8 Intégrale d'Euler-Pochhammer	53
Exercices du chapitre 3	55
Chapitre 4 : Fonction hypergéométrique de Gauss	59
4.1 Définition, premières propriétés et exemples	59
4.2 Relations de contiguïté	62
4.3 Solutions de l'équation hypergéométrique	63
4.3.1 Solutions lorsque $0 < x < 1$	63
4.3.2 Solutions lorsque $x > 1$	66
4.3.3 Solutions lorsque $x < 0$	67
4.4 Formules de transformation	69
4.4.1 Formules d'Euler et Gauss	69
4.4.2 Formule de Clausen	70
4.5 Formules sommatoires	72
4.5.1 Gauss et Vandermonde	72
4.5.2 Bailey, Kummer, et encore Gauss	73
4.6 Étude au voisinage de 1	75
Exercices du chapitre 4	79
Chapitre 5 : Intégrales elliptiques	83
5.1 Longueur d'un arc d'ellipse	83
5.2 Intégrale elliptique complète de première espèce	85
5.3 Intégrales elliptiques complètes	87
5.4 Moyenne arithmético-géométrique de Gauss	89
5.5 Fonctions de Jacobi	92
5.5.1 Définition et premières propriétés	92
5.5.2 Equation du pendule simple	94

5.5.3 Applications au calcul intégral	95
Exercices du chapitre 5	98
Chapitre 6 : Fonction hypergéométrique de Kummer	101
6.1 Définition et exemples	101
6.2 Propriétés générales	103
6.2.1 Identité de Kummer	103
6.2.2 Relations de contiguïté	104
6.2.3 Solutions de l'équation hypergéométrique confluyente	104
Exercices du chapitre 6	106
Chapitre 7 : Fonctions de Bessel	109
7.1 Equation de Bessel	109
7.2 Fonction de Bessel de première espèce	112
7.2.1 Relations de contiguïté et dérivées	112
7.2.2 Première représentation intégrale	113
7.2.3 Deuxième représentation intégrale	114
7.2.4 Développement asymptotique et zéros	116
7.2.5 Intégrales de Lommel	117
7.3 Fonction de Bessel de deuxième espèce	118
7.3.1 Définition et représentation intégrale	118
7.3.2 Développement en série	120
7.3.3 Retour sur l'équation de Bessel	121
Exercices du chapitre 7	122
Chapitre 8 : Fonction polylogarithme	125
8.1 Généralités et exemples fondamentaux	125
8.1.1 Définition et propriétés générales	125
8.1.2 Dilogarithme	127
8.1.3 Trilogarithme	129
8.2 Polylogarithme de variable complexe	130
8.2.1 Introduction	130
8.2.2 Fonction de Clausen	132
8.2.3 Fonction polytangente inverse	133
8.2.4 Logarithme de variable complexe	134
8.3 Intégrales et séries	136
8.3.1 Utilisation de la fonction de Clausen	136
8.3.2 Utilisation du polylogarithme de variable réelle	138
8.4 Formules BBP	140
8.4.1 Définition et exemples	140

8.4.2	Formules BBP et polylogarithme	142
	Exercices du chapitre 8	144
Chapitre 9	Polynômes orthogonaux classiques	147
9.1	Suites de polynômes orthogonaux	147
9.1.1	Généralités	147
9.1.2	Relation de récurrence	149
9.1.3	Zéros des polynômes orthogonaux	150
9.1.4	Formules de Rodrigues	151
9.2	Polynômes de Jacobi	152
9.2.1	Définition et propriétés générales	152
9.2.2	Polynômes de Gegenbauer	158
9.2.3	Polynômes de Legendre	159
9.2.4	Polynômes de Tchebychev	161
9.3	Polynômes de Laguerre	164
9.4	Polynômes d’Hermite	166
	Exercices du chapitre 9	168
Chapitre 10	Fonctions q-hypergéométriques	171
10.1	Introduction	171
10.1.1	Symbole de Watson et coefficients q -binomiaux	171
10.1.2	q -dérivée et q -intégrale	173
10.1.3	Fonctions q -exponentielle et q -logarithme	176
10.2	Fonctions q -hypergéométriques usuelles	178
10.2.1	Introduction et premiers exemples	178
10.2.2	Fonction q -hypergéométrique de Heine	181
10.3	Deux formules sommatoires	183
	Exercices du chapitre 10	185
Annexes	187
	Annexe 1 : Fonction de Lerch	187
	Annexe 2 : Fonctions analytiques de variable réelle	189
	A.2.1 Introduction	189
	A.2.2 Prolongement analytique	193
	A.2.3 Systèmes différentiels à coefficients analytiques	194
	Annexe 3 : Fonctions hyperboliques réciproques	196
	Annexe 4 : Théorème de la phase stationnaire	198
Solutions des exercices	201
	Solutions des exercices du chapitre 1	201
	Solutions des exercices du chapitre 2	207

Solutions des exercices du chapitre 3	218
Solutions des exercices du chapitre 4	226
Solutions des exercices du chapitre 5	239
Solutions des exercices du chapitre 6	246
Solutions des exercices du chapitre 7	254
Solutions des exercices du chapitre 8	266
Solutions des exercices du chapitre 9	276
Solutions des exercices du chapitre 10	284
Bibliographie	293
Index	295