AT - NOMBRES D'EULER ET DE BERNOULLI POLYNOMES DE BERNOULLI

Nombres de Bernoulli

Soit la fonction méromorphe Φ définie par

$$\Phi(z) = \frac{z}{e^z - 1}\,.$$

Elle présente des pôles aux points $2ik\pi$ avec k entier non nul. Il en résulte qu'elle est développable en série entière à l'origine sous la forme

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, z^n\,,$$

et que le rayon de convergence de cette série vaut 2π.

Remarquons que

$$\Phi(z) + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1} = \frac{z}{2}\coth\frac{z}{2} \tag{1}$$

est une fonction paire. Les coefficients a_{2n+1} sont nuls pour $n > 0$, et

$$a_1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Par ailleurs

$$a_0 = \left(\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\right)^{-1} = 1\,.$$

On a donc

$$\Phi(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n}\,.$$

Pour $n > 0$, on posera

$$B_n = (-1)^{n+1} a_{2n}\,.$$

Ces nombres sont les **nombres de Bernoulli**. (Pour certains auteurs ce sont les nombres a_n qui sont les nombres de Bernoulli). Ils permettent d'écrire le développement en série entière à l'origine de nombreuses fonctions classiques. On a pour commencer

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{B_n}{(2n)!}\, z^{2n}\,. \tag{2}$$

De (1), on déduit, en changeant de variable et pour $|z| < \pi$,

$$z \coth z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n} . \tag{3}$$

En remplaçant z par iz dans (3), on trouve

$$z \operatorname{cotan} z = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} z^{2n} . \tag{4}$$

En remarquant que

$$\operatorname{cotan} z - \tan z = 2 \operatorname{cotan} 2z \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} z + \tan z = \frac{2}{\sin 2z}$$

on en déduit le développement de $\tan z$, pour $|z| < \pi/2$, et celui de $\dfrac{z}{\sin z}$, pour $|z| < \pi$.

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} (2^{2n} - 1) z^{2n-1} , \tag{5}$$

et

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} (2^{2n} - 2) z^{2n} . \tag{6}$$

En changeant z en iz, on aurait les développements de $\operatorname{th} z$ et $\dfrac{z}{\operatorname{sh} z}$.

On peut obtenir de nombreuses relations entre les nombres de Bernoulli en faisant des produits de séries entières, ou en dérivant des séries entières. Partons pour commencer de la relation

$$\Phi(z)(e^z - 1) = z ,$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = z .$$

On obtient en effectuant le produit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!(n-k)!} \right) z^n = z .$$

En multipliant par $n!$, on en déduit donc, pour $n > 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k = 0 . \tag{7}$$

En écrivant cette relation pour les entiers pairs, et en remplaçant les coefficients a_k par leur valeur, on obtient, pour $n > 1$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} (-1)^{k+1} B_k = n - 1 \,. \tag{8}$$

De même, pour les entiers impairs, on obtient, si $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{k+1} B_k = n - \frac{1}{2} \,. \tag{9}$$

Utilisons maintenant la relation

$$\frac{\sin z}{z}\, z \operatorname{cotan} z = \cos z \,.$$

Cela donne

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}\right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\, 2^{2n} z^{2n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \,.$$

En cherchant le coefficient de z^{2n}, on obtient, pour $n \geq 1$, après multiplication par $(-1)^n(2n+1)!$,

$$1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} 2^{2k} B_k = 2n + 1 \,,$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{2n+1}{2k} 2^{2k} B_k = 2n \,. \tag{10}$$

Partons maintenant de la relation

$$\tan z \; z \operatorname{cotan} z = z \,.$$

On a donc

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} (2^{2n} - 1) z^{2n-1}\right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\, 2^{2n} z^{2n}\right) = z \,.$$

En cherchant le coefficient de z^{2n-1}, on en déduit, pour $n > 1$, la relation

$$(2^{2n} - 1) B_n = \sum_{k=1}^{n-1} (2^{2k} - 1) \binom{2n}{2k} B_k B_{n-k} \,. \tag{11}$$

Pour finir, utilisons la relation

$$-\frac{d}{dz}(\operatorname{cotan} z) = 1 + \operatorname{cotan}^2 z \,,$$

c'est-à-dire

$$z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\, 2^{2n} (2n-1) z^{2n-2} = 1 + z^{-2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\, 2^{2n} z^{2n}\right)^2 \,.$$

La série de droite se développe sous la forme

$$1+z^{-2}-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}z^{2n-2}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_kB_{n-k}2^{2n}z^{2n-2}\,.$$

En identifiant les coefficients de z^{2n-2}, il vient, après simplifications, pour $n\geq 2$,

$$(2n+1)B_n=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}\,B_kB_{n-k}\,. \tag{12}$$

Par une des formules précédentes, on obtient facilement

$$B_1=\frac{1}{6}\quad,\quad B_2=\frac{1}{30}\quad,\quad B_3=\frac{1}{42}\,.$$

On voit que les trois premiers termes sont ordonnés en décroissant. On peut obtenir également le comportement des termes suivants :

Proposition 1 La suite $(B_n)_{n\geq 3}$ est une suite strictement croissante de nombres rationnels positifs qui admet $+\infty$ pour limite.

Le fait que B_n soit un nombre rationnel positif résulte immédiatement, par récurrence, de la formule (12) par exemple. Par ailleurs, il résulte aussi de la formule (12) que, pour $n\geq 4$, on a

$$\begin{aligned}B_n-B_{n-1}&=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_kB_{n-k}-B_{n-1}\\&=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=2}^{n-2}\binom{2n}{2k}B_kB_{n-k}+2\binom{2n}{2}B_1B_{n-1}\right)-B_{n-1}\\&=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=2}^{n-2}\binom{2n}{2k}B_kB_{n-k}+\frac{1}{3}(2n^2-7n-3)B_{n-1}\right)\,.\end{aligned}$$

Pour $n\geq 4$, le trinôme $2n^2-7n-3$ est strictement positif. On en déduit dans ce cas l'inégalité

$$B_n>B_{n-1}\,.$$

La suite (B_n) admet une limite ℓ. Si cette limite était finie, on aurait

$$\frac{B_n}{(2n)!}\sim\frac{\ell}{(2n)!}\,,$$

et puisque la série entière de coefficients $\ell/(2n)!$ est de rayon infini, il en serait de même de la série entière définissant Φ, ce qui est faux. Donc la suite (B_n) admet $+\infty$ pour limite.

On peut également avoir la valeur de B_n en fonction des termes suivants de la suite. Remarquons que si $|z| < \pi/2$, alors

$$|\pi/2 - z| < \pi\,.$$

On peut donc écrire

$$\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \frac{\pi}{2}\,\tan z - z\tan z\,,$$

et chercher les séries des deux membres. Pour le premier, on obtient

$$\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-k} (-z)^k\right)\,,$$

et, en inversant les sommations, ce qui est licite puisque l'on a convergence absolue, on obtient

$$\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} \left(\sum_{n\geq\max(1,k/2)} \frac{\pi^{2n-k}}{(2n-k)!}\,B_n\right) z^k\,.$$

Pour le second membre

$$\frac{\pi}{2}\,\tan z - z\tan z = \frac{\pi}{2}\sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{(2s)!}\,2^{2s}(2^{2s}-1)z^{2s-1} - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_s}{(2s)!}\,2^{2s}(2^{2s}-1)z^{2s}\,.$$

En identifiant, on obtient, après simplifications, pour les termes pairs, en prenant $k = 2s$ avec $s \geq 1$,

$$(2^{2s} - 2)B_s = \pi^{-2s} \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n-2s)!}\,\pi^{2n}\,, \tag{13}$$

et pour les termes impairs, en prenant $k = 2s - 1$ avec $s \geq 1$,

$$(2^{2s} - 2s - 1)B_s = 2s\pi^{-2s} \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n-2s+1)!}\,\pi^{2n}\,. \tag{14}$$

Nombres d'Euler

La fonction définie par

$$\Psi(z) = \frac{1}{\cos z}$$

est méromorphe et admet des pôles aux points $\pi/2 + k\pi$, avec k entier. Elle est donc développable en série entière à l'origine de rayon $\pi/2$. En raison de la parité de Ψ, on aura

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}\,. \tag{15}$$

Les nombres E_n sont appelés **nombres d'Euler**.

En écrivant la relation
$$\frac{1}{\cos z}\,\cos z = 1$$
on obtient
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,z^{2n}\right) = 1\,,$$
et en cherchant le coefficient de z^{2n}, on en déduit, après simplification, pour $n \geq 1$,

(16) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}(-1)^k E_k = 0\,,$$

soit

(17) $$E_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k}(-1)^k E_k\,.$$

Cette relation permet d'obtenir E_n de proche en proche à partir de E_0 qui vaut 1. En particulier, on a également E_1 qui vaut 1. On peut, là aussi, obtenir de nombreuses relations entre les nombres B_n et E_n.

Partons du produit
$$\sin z\,\frac{1}{\cos z} = \tan z\,,$$
c'est-à-dire
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,z^{2n-1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}(2^{2n}-1)z^{2n-1}\,.$$

En identifiant les coefficients de z^{2n-1} et en simplifiant, on trouve, pour $n \geq 1$,

(18) $$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\binom{2n-1}{2k} E_k\,.$$

Si maintenant on utilise la relation
$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \frac{1}{\cos z}\,\tan z\,,$$
on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\,2^{2n}(2^{2n}-1)z^{2n-1}\right)\,.$$
En identifiant les coefficients de z^{2n-1} et en simplifiant, il vient, pour $n \geq 1$,

(19) $$2nE_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k} 2^{2k}(2^{2k}-1)B_k E_{n-k}\,.$$

En partant de la relation
$$\frac{d}{dz}(\tan z) = \frac{1}{\cos^2 z}\,,$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}\, 2^{2n+2}(2^{2n+2}-1)(2n+1)z^{2n} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}\right)^2\,,$$
on en déduit, pour $n \geq 0$,

(20)
$$2^{2n+1}(2^{2n+2}-1)B_{n+1} = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_k E_{n-k}\,.$$

On peut aussi obtenir les nombres E_n en fonction des B_n en écrivant
$$\frac{1}{\cos z} = \frac{2z}{\sin 2z}\,\frac{\sin z}{z}\,,$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!}\, z^{2n} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\, 2^{2n}(2^{2n}-2)z^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n}\right)\,.$$
On en déduit, pour $n \geq 1$,

(21)
$$(2n+1)E_n = (-1)^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k}(-1)^k(2^{2k}-2)B_k 2^{2k}\right)\,.$$

Ceci permet d'obtenir le comportement de la suite (E_n).

Proposition 2 La suite $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante de nombres entiers positifs.

La formule (17) permet de montrer par récurrence que les E_n sont entiers, et la formule (19) qu'ils sont positifs. A partir de cette dernière formule, on a
$$\begin{aligned} E_n - E_{n-1} &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=2}^{n} \binom{2n}{2k} 2^{2k}(2^{2k}-1)B_k E_{n-k} + 2n(2n-1)E_{n-1}\right) - E_{n-1} \\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=2}^{n} \binom{2n}{2k} 2^{2k}(2^{2k}-1)B_k E_{n-k}\right) + 2(n-1)E_{n-1}\,. \end{aligned}$$
Cette relation montre que, pour $n \geq 2$, on a
$$E_n > E_{n-1}\,.$$
Il en résulte que la suite (E_n) admet $+\infty$ pour limite.

On peut obtenir également les nombres E_n en fonction des nombres B_n.

En écrivant
$$\frac{1}{\cos z} = \frac{2z}{\sin 2z} \frac{\sin z}{z} \,,$$
c'est-à-dire
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!}\, 2^{2n}(2^{2n}-2) z^{2n}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, z^{2n}\right) .$$
On en déduit, pour $n \geq 1$,

(22)
$$(2n+1)E_n = (-1)^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} 2^{2k}(2^{2k}-2) B_k\right) .$$

Pour terminer cette liste de formules, remarquons que si $|z| < \pi/2$, alors
$$|\pi/2 - z| < \pi \,.$$
En écrivant
$$\frac{\frac{\pi}{2} - z}{\sin(\frac{\pi}{2} - z)} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos z} - \frac{z}{\cos z} \,,$$
on peut chercher le développement en série des deux membres. Le premier membre s'écrit
$$\frac{\frac{\pi}{2} - z}{\sin(\frac{\pi}{2} - z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n-k} (-z)^k\right) (2^{2n}-2) \,,$$
et, en inversant les sommations, ce qui est possible puisque la convergence est absolue, on obtient
$$\frac{\frac{\pi}{2} - z}{\sin(\frac{\pi}{2} - z)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{2}{\pi}\right)^k \left(\sum_{n \geq \max(1,k/2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{B_n}{(2n-k)!} (2^{2n}-2)\right) z^k \,.$$
Pour le second membre, on a,
$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos z} - \frac{z}{\cos z} = \frac{\pi}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} z^{2s} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} z^{2s+1} \,.$$
En identifiant, on obtient, après simplifications, pour les termes pairs, en prenant $k = 2s$ avec $s \geq 0$,

(23)
$$E_s = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{B_n}{(2n-2s)!} (2^{2n}-1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} ,$$

et pour les termes impairs, en prenant $k = 2s+1$ avec $s \geq 0$,

(24)
$$(2s+1)E_s = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1} \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n-2s-1)!} (2^{2n}-2) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} .$$

Polynômes de Bernoulli

Introduisons la fonction h définie sur $\{(z,u) \,|\, |z| < 2\pi\,,\ u \in \mathbb{C}\}$ par

$$h(z,u) = \Phi(z)e^{uz} = \frac{z}{e^z - 1}e^{uz}\,.$$

Pour u fixé, c'est une fonction holomorphe en z et on obtient son développement en série entière dans le disque de centre 0 et de rayon 2π en effectuant le produit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\, z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} a_k\right) z^n\,.$$

On définit une suite de polynômes P_n de degré n et à coefficients réels, appelés **polynômes de Bernoulli** en posant

$$P_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k u^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} u^k\,, \tag{25}$$

et donc,

$$h(z,u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)\frac{z^n}{n!}\,. \tag{26}$$

En particulier

$$h(z,0) = \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\frac{z^n}{n!}\,,$$

et donc, en identifiant les développements

$$\begin{cases} P_0(0) = 1 \\ P_1(0) = -1/2 \\ P_{2n+1}(0) = 0 \text{ si } n > 0 \\ P_{2n}(0) = (-1)^{n+1} B_n \text{ si } n > 0 \end{cases}. \tag{27}$$

Soit λ et z réels. On a

$$h\left(2\lambda i z, \frac{1}{2\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\frac{(2\lambda i z)^n}{n!}\,.$$

Par ailleurs

$$h\left(2\lambda i z, \frac{1}{2\lambda}\right) = (\lambda z \operatorname{cotan} \lambda z - \lambda i z)(\cos z + i \sin z)\,,$$

et donc, en séparant les parties réelle et imaginaire,

$$\lambda z \cos z \operatorname{cotan} \lambda z + \lambda z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)(-1)^n \frac{(2\lambda z)^{2n}}{(2n)!}\,,$$

et

$$\lambda z \sin z \operatorname{cotan} \lambda z - \lambda z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)(-1)^n \frac{(2\lambda z)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Lorsque $\lambda = 2$, on obtient

$$2z \sin z \operatorname{cotan} 2z - 2z \cos z = -\frac{z}{\cos z}\,,$$

et, en identifiant les développements en série, on trouve, pour $n \geq 0$,

(28) $$P_{2n+1}(1/4) = (-1)^{n+1}(2n+1)\,\frac{E_n}{4^{2n+1}}\,.$$

De même

$$2z \cos z \operatorname{cotan} 2z + 2z \sin z = \frac{z}{\sin z}\,,$$

et en identifiant les développements en série, on trouve, pour $n \geq 1$,

(29) $$P_{2n}(1/4) = (-1)^n(2^{2n}-2)\,\frac{B_n}{4^{2n}}\,.$$

Lorsque $\lambda = 1$, on obtient encore

$$z \cos z \operatorname{cotan} z + z \sin z = \frac{z}{\sin z}\,,$$

et, en identifiant les développements en série, on trouve, pour $n \geq 1$,

(30) $$P_{2n}(1/2) = (-1)^n(2^{2n}-2)\,\frac{B_n}{2^{2n}}\,.$$

On remarque en particulier que

(31) $$P_{2n}(1/2) = 2^{2n} P_{2n}(1/4)\,.$$

Les polynômes P_n permettent donc d'obtenir les nombres de Bernoulli et d'Euler.

Calculons maintenant $h(z,1)$. On trouve

$$h(z,1) = \Phi(z)e^z = z + \Phi(z) = z + h(z,0)\,,$$

et, en identifiant les développements en série, on obtient

(32) $$\left\{\begin{array}{rcll} P_n(0) & = & P_n(1) & \text{si } n \neq 1 \\ 1 + P_1(0) & = & P_1(1) & \end{array}\right.\,.$$

On a également

$$h(z, 1-u) = \Phi(z)e^z e^{-uz} = \Phi(-z)e^{-uz} = h(-z,u)\,,$$

et, en identifiant les développements en série,

(33) $$P_n(1-u) = (-1)^n P_n(u)\,.$$

En particulier, on en déduit, si $n \geq 1$, les égalités

$$P_{2n+1}(0) = P_{2n+1}(1) = P_{2n+1}(1/2) = 0\,. \tag{34}$$

On obtient facilement le polynôme dérivé de P_n :

$$P_n'(u) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} a_{n-k}u^{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} a_{n-k}u^{k-1} = nP_{n-1}(u)\,,$$

d'où, si $n \geq 1$, la relation

$$P_n' = nP_{n-1}\,. \tag{35}$$

On en déduit donc, pour $n \geq 1$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_{2n}(u) & = & 2n \displaystyle\int_0^u P_{2n-1}(s)\,ds + (-1)^{n+1}B_n \\ P_{2n+1}(u) & = & (2n+1)\displaystyle\int_0^u P_{2n}(s)\,ds \end{array}\right. \tag{36}$$

et on remarque en particulier que, si $n \geq 1$,

$$\int_0^1 P_n(u)\,du = \frac{1}{n+1}\Big[P_{n+1}(u)\Big]_0^1 = 0\,. \tag{37}$$

On peut calculer les premiers polynômes de Bernoulli

$$\begin{array}{rcl} P_0(u) & = & 1 \\ P_1(u) & = & u - \frac{1}{2} \\ P_2(u) & = & u^2 - u + \frac{1}{6} \\ P_3(u) & = & u^3 - \frac{3}{2}\,u^2 + \frac{1}{2}\,u \\ P_4(u) & = & u^4 - 2u^3 + u^2 - \frac{1}{30} \\ P_5(u) & = & u^5 - \frac{5}{2}\,u^4 + \frac{5}{3}\,u^3 - \frac{1}{6}\,u \end{array} \tag{38}$$

On peut étudier l'allure des courbes représentatives des polynômes P_n dans l'intervalle $[0,\,1]$ en utilisant, par récurrence, la formule (35). Il est alors facile de voir que le polynôme $(-1)^{n+1}P_n$ est décroissant sur $[0,\,1/2]$, et comme le produit $P_{2n}(0)P_{2n}(1/2)$ est négatif d'après les formules (27) et (30), il possède un zéro unique α_n dans cet intervalle. D'après la formule (29), ce zéro est en fait dans $[0,\,1/4]$. Quant à $(-1)^{n+1}P_{2n+1}$, il est croissant sur $[0,\,\alpha_n]$ et décroissant sur $[\alpha_n,\,1/2]$ et ne possède pas d'autres zéros dans $[0,\,1/2]$ que 0 et 1/2. On en déduit en particulier que, sur $[0,\,1]$, on a

$$|P_{2n}(u)| \leq |P_{2n}(0)| = B_n\,. \tag{39}$$

La relation (35) permet d'écrire

$$P_{n+1}(u) = (n+1) \int_0^u P_n(t)\,dt + P_{n+1}(0)\,,$$

et en intégrant, on obtient

$$0 = \int_0^1 P_{n+1}(u)\,du = P_{n+1}(0) + (n+1) \int_0^1 \left(\int_0^u P_n(t)\,dt \right) du\,,$$

d'où

$$P_{n+1}(u) = (n+1) \left(\int_0^u P_n(u)\,du - \int_0^1 \left(\int_0^u P_n(t)\,dt \right) du \right). \tag{40}$$

On introduit fréquemment une autre famille de polynômes, que l'on appelle encore polynômes de Bernoulli, en posant

$$Q_n(u) = \int_0^u P_n(t)\,dt\,. \tag{41}$$

Ces polynômes vérifient donc

$$Q_n' = P_n = \frac{1}{n+1} P_{n+1}'\,, \tag{42}$$

$$P_{n+1} = (n+1) \left(Q_n - \int_0^1 Q_n(u)\,du \right), \tag{43}$$

$$Q_n = \frac{1}{n+1} (P_{n+1} - P_{n+1}(0))\,, \tag{44}$$

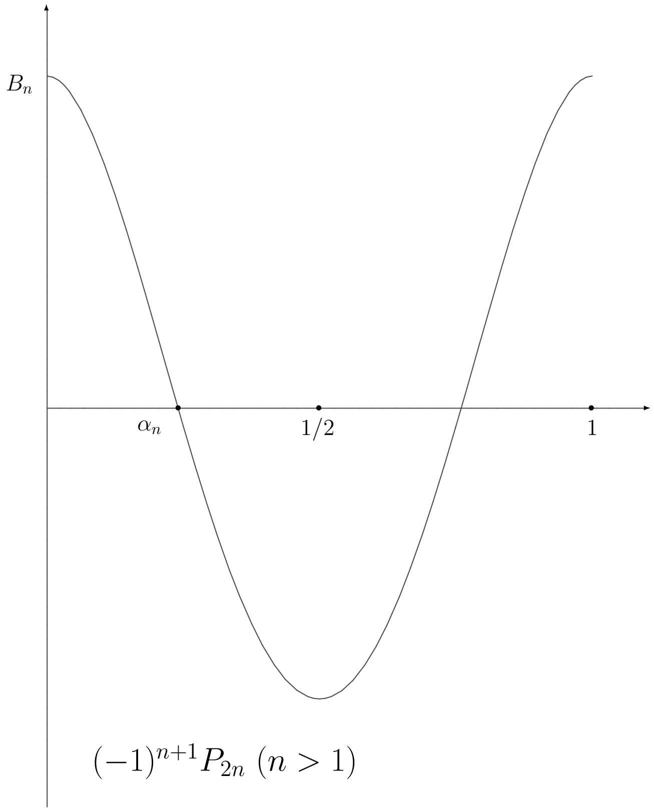
et en particulier

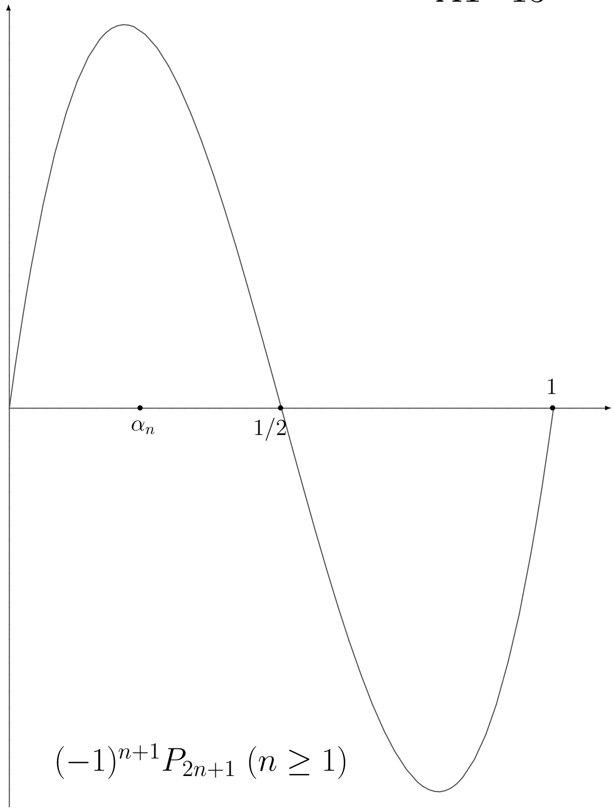
$$Q_{2n} = \frac{P_{2n+1}}{2n+1}\,,$$

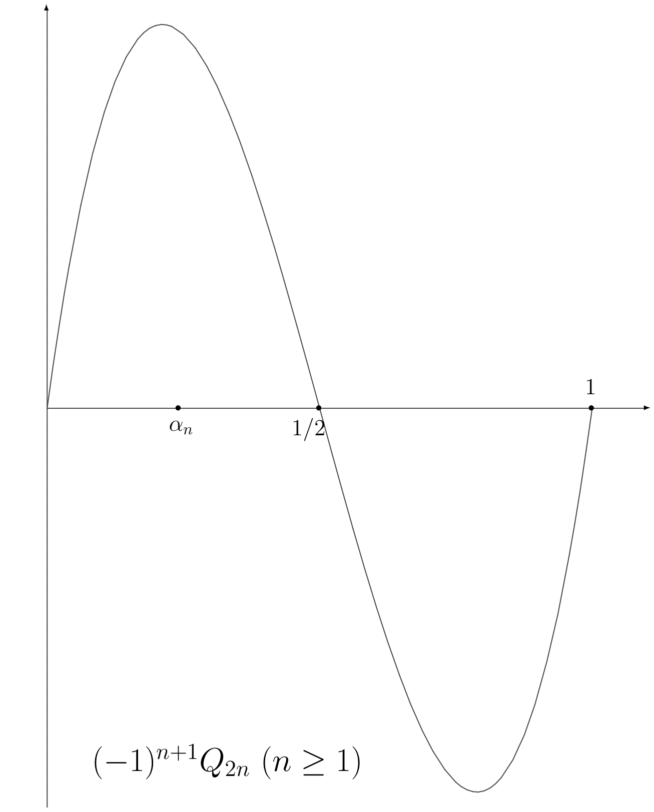
$$Q_n(0) = 0 \quad , \quad Q_n(1) = 0 \ (n \geq 1) \quad , \quad Q_{2n}(1/2) = 0\,. \tag{45}$$

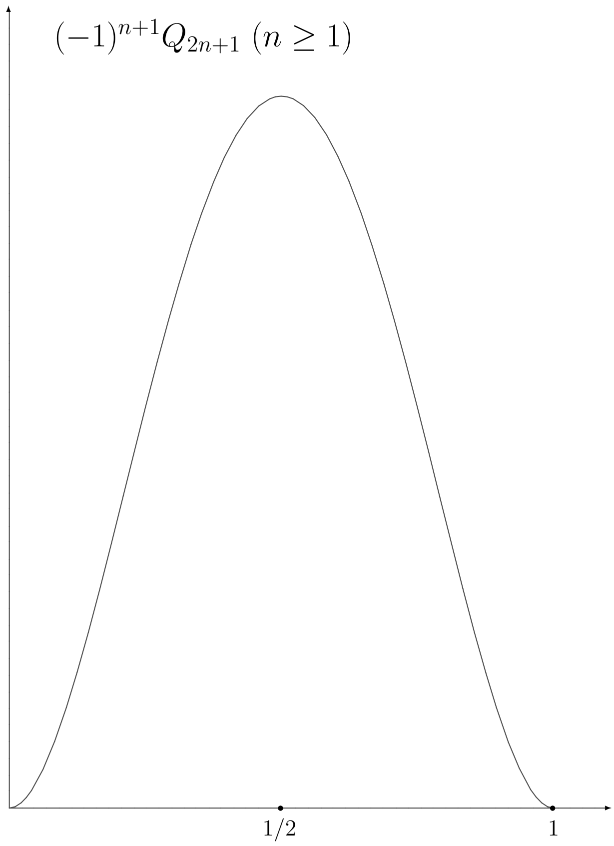
Par ailleurs, le polynôme Q_{2n+1} ne s'annule pas dans $]\,0,\,1\,[$.

L'allure des courbes obtenues est la suivante :


B_n
α_n
$1/2$
1
$(-1)^{n+1}P_{2n}$ $(n > 1)$


1
α_n
$1/2$
$(-1)^{n+1}P_{2n+1}$ $(n \geq 1)$


1
α_n
$1/2$
$(-1)^{n+1}Q_{2n}$ $(n \geq 1)$


$(-1)^{n+1}Q_{2n+1}$ $(n \geq 1)$
$1/2$
1

On peut obtenir les nombres B_n à partir des polynômes P_n d'une autre manière. Soit m et n des entiers strictement positifs. On a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 P_n(u)P_m(u)\,du &= \Big[P_n(u)Q_m(u)\Big]_0^1 - \int_0^1 P_n'(u)Q_m(u)\,du\\ &= -\int_0^1 nP_{n-1}(u)\,\frac{P_{m+1}(u)-P_{m+1}(0)}{m+1}\,du\\ &= -\frac{n}{m+1}\left(\int_0^1 P_{n-1}(u)P_{m+1}(u) - P_{m+1}(0)\int_0^1 P_{n-1}(u)\,du\right).\end{aligned}$$

Lorsque $n \geq 2$, on obtient

$$\int_0^1 P_n(u)P_m(u)\,du = -\frac{n}{m+1}\int_0^1 P_{n-1}(u)P_{m+1}(u)\,du\,,$$

et, lorsque $n = 1$,

$$\int_0^1 P_n(u)P_m(u)\,du = \frac{1}{m+1}\,P_{m+1}(0)\,.$$

Alors, on en déduit facilement que

$$\int_0^1 P_n(u)P_m(u)\,du = (-1)^{n-1}\binom{m+n}{n}^{-1} P_{m+n}(0)\,. \tag{46}$$

On a donc, lorsque m et n sont de parité différente,

$$\int_0^1 P_n(u)P_m(u)\,du = 0\,,$$

et lorsque m et n ont même parité,

$$\int_0^1 P_n(u)P_m(u)\,du = (-1)^{n-1}\binom{m+n}{n}^{-1}(-1)^{1+(m+n)/2}B_{(m+n)/2} = (-1)^{(m-n)/2}\binom{m+n}{n}^{-1}B_{(m+n)/2}\,.$$

En particulier, pour $n \geq 1$,

$$B_n = \binom{2n}{n}\int_0^1 P_n^2(u)\,du\,. \tag{47}$$

Développement en série de Fourier des polynômes de Bernoulli

Le développement en série de Fourier des polynômes P_n permet de relier les nombres de Bernoulli à la fonction ζ de Riemann.

Pour $n \geq 1$, soit φ_n la fonction de période 1 dont la restriction à $]\,0,\,1\,[$ vaut P_n. Cherchons les coefficients de Fourier de cette fonction. Tout d'abord

$$c_0(\varphi_n) = \int_0^1 P_n(u)\,du = 0\,.$$

En intégrant par parties, on obtient, pour $k \neq 0$,

$$c_k(\varphi_n) = \int_0^1 P_n(u)e^{-2i\pi ku}du = \left[P_n(u)\frac{e^{-2i\pi ku}}{-2i\pi k}\right]_0^1 - n\int_0^1 P_{n-1}(u)\,\frac{e^{-2i\pi ku}}{-2i\pi k}\,du\,.$$

Si $n = 1$, la seconde intégrale est nulle, et l'on obtient

$$c_k(\varphi_1) = -\frac{1}{2i\pi k}\,.$$

Pour $n > 1$, le premier terme du second membre est nul, et il reste

$$c_k(\varphi_n) = \frac{n}{2i\pi k}\,c_k(\varphi_{n-1})\,.$$

On en déduit que, si $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{Z}^*$,

$$c_k(\varphi_n) = -\frac{n!}{(2i\pi k)^n}\,.$$

Comme φ_1 est continûment dérivable sur $]\,0,\,1\,[$, sa série de Fourier converge vers φ_1 dans cet intervalle (simplement, et même uniformément sur tout compact). Elle convergera vers 0 en 0 et 1.

Si $n > 1$, on a

$$|c_k(\varphi_n)| = \frac{n!}{(2\pi k)^n}\,,$$

qui est le terme général d'une série convergente. La série de Fourier convergera normalement vers φ_n sur $\mathbb{R}$. Pour u dans $[\,0,\,1\,]$, on peut donc écrire

$$P_n(u) = -n!\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{2i\pi ku}}{(2i\pi k)^n} + \frac{e^{-2i\pi ku}}{(-2i\pi k)^n}\right) = -2n!\ \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{2i\pi ku}}{(2i\pi k)^n}\right)\,. \tag{48}$$

On peut distinguer suivant la parité de n pour obtenir la série de Fourier trigonométrique

$$P_{2n}(u) = (-1)^{n+1}2(2n)!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k\pi u)}{(2k\pi)^{2n}}\,, \tag{49}$$

$$P_{2n+1}(u) = (-1)^{n+1} 2(2n+1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi u)}{(2k\pi)^{2n+1}} . \tag{50}$$

Appliquons la formule (49) pour $u = 0$, on en tire

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n . \tag{51}$$

Cela donne par exemple

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad , \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \quad , \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} .$$

En écrivant

$$\zeta(2n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{2n}} ,$$

on en déduit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \zeta(2n) ,$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{2n}} = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2(2n)!} B_n . \tag{52}$$

On a également

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2n}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^{2n}} ,$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{2n}} = \frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!} B_n . \tag{53}$$

Appliquons maintenant la formule (50) pour $u = 1/4$. On trouve

$$P_{2n+1}(1/4) = (-1)^{n+1} 2(2n+1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{(2k\pi)^{2n+1}} = (-1)^{n+2} 2(2n+1)! \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2(2s+1)\pi)^{2s+1}} .$$

Alors, grâce à la formule (28), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}} = \frac{(\pi/2)^{2n+1}}{2(2n)!} E_n = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}} \frac{E_n}{(2n)!} . \tag{54}$$

Le développement en série de Fourier permet de trouver un majorant de P_n sur $[\,0,\,1\,]$. Pour les entiers pairs on retrouve la formule (39). Pour les impairs, on majore $|\sin(2k\pi u)|$ par 1 dans (50), ce qui donne

$$|P_{2n+1}(u)| \leq \frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \zeta(2n+1) ,$$

et en majorant $\zeta(2n+1)$ par $\zeta(2n)$, on obtient

$$|P_{2n+1}(u)| \leq \frac{2n+1}{2\pi} B_n\,. \tag{55}$$

Comportement asymptotique des nombres d'Euler et de Bernoulli

Pour obtenir des encadrement et des équivalents de B_n, il suffit de savoir le faire pour $\zeta(2n)$, ce que l'on obtient facilement en comparant la série définissant ce nombre à une intégrale. En effet, si $k > 1$, on a

$$\frac{1}{k^{2n}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{2n}}\,,$$

et donc, en sommant,

$$\zeta(2n) \leq 1 + \int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^{2n}} = 1 + \frac{1}{2n-1}\,.$$

Par ailleurs, on a de manière évidente

$$\zeta(2n) \geq 1\,.$$

On en déduit

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \leq B_n \leq \frac{2n}{2n-1}\,\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,, \tag{56}$$

d'où l'équivalent

$$B_n \sim \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,, \tag{57}$$

ou encore, en utilisant la formule de Stirling,

$$B_n \sim 4\left(\frac{n}{e\pi}\right)^{2n} \sqrt{n\pi}\,. \tag{58}$$

Remarque : on déduit de ce qui précède que

$$\left(\frac{B_n}{(2n)!}\right)^{1/2n} \sim \frac{1}{2\pi}\,,$$

et l'on retrouve bien que le rayon de convergence de la série entière définissant Φ vaut 2π.

Pour obtenir des résultats analogues avec E_n, introduisons la fonction ψ_s définie par la série entière de rayon 1 suivante :

$$\psi_s(z) = \sum_{n=s}^{\infty} \binom{2n}{2s} z^{2n} = \frac{1}{(2s)!} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n-2s)!}\, z^{2n}\,.$$

Pour obtenir la somme de cette série, on peut utiliser les probabilités. Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Notons Y_s la variable aléatoire donnant le rang pour lequel X_n vaut 1 pour la $s-$ième fois. On a donc, si $q = 1 - p$,

$$P(Y_n = s) = \binom{n-1}{s-1} p^{s-1} q^{n-s} p\,.$$

La fonction génératrice de Y_s est donc

$$\sum_{n=s}^{\infty} \binom{n-1}{s-1} p^s q^{n-s} z^n\,.$$

En particulier, pour $s = 1$, elle vaut

$$\sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} z^n = \frac{zp}{1 - zq}\,.$$

Mais Y_s peut être considérée comme la somme de s variables indépendantes de même loi que Y_1. Sa fonction génératrice vaut donc

$$\sum_{n=s}^{\infty} \binom{n-1}{s-1} p^s q^{n-s} z^n = \left(\frac{zp}{1 - zq}\right)^s\,.$$

On en déduit l'égalité

$$\sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} p^{s+1} q^{n-s} z^{n+1} = \left(\frac{zp}{1 - zq}\right)^{s+1}\,,$$

et aussi

$$\sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} p^{s+1} q^{n-s} (-z)^{n+1} = \left(\frac{-zp}{1 + zq}\right)^{s+1}\,.$$

En soustrayant les deux dernières formules, on obtient, après simplification, pour $s = 2r$,

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{2n}{2r} p^{2r+1} q^{2n-2r} z^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{zp}{1 - zq}\right)^{2r+1} + \left(\frac{zp}{1 + zq}\right)^{2r+1}\right)\,.$$

En prenant $p = q = 1/2$, on en déduit

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{2n}{2r} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{z}{2 - z}\right)^{2r+1} + \left(\frac{z}{2 + z}\right)^{2r+1}\right) = \frac{z}{2}\,\psi_r(z/2)\,.$$

Pour utiliser la formule (23) encadrons B_n par la formule (56). Pour $n \geq s$ on a

$$\frac{2n}{2n - 1} \leq \frac{2s}{2s - 1}\,,$$

d'où,

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \leq B_n \leq \frac{2s}{2s - 1}\,\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\,.$$

On en déduit

$$2\,\frac{(2n)!}{(2n-2s)!}(2^{-2n}-4^{-2n}) \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\frac{2^{2n}-1}{(2n-2s)!}\,B_n \le \frac{2s}{2s-1}\,2\,\frac{(2n)!}{(2n-2s)!}(2^{-2n}-4^{-2n})\,.$$

En sommant de s à $+\infty$, on obtient alors

$$2(2s)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1}(\psi_s(1/2)-\psi_s(1/4)) \le E_s \le \frac{2s}{2s-1}\,2(2s)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1}(\psi_s(1/2)-\psi_s(1/4))\,.$$

Or

$$\psi_s(1/2) = 1+\frac{1}{3^{2s+1}} \quad \text{et} \quad \psi_s(1/4) = 2\left(\frac{1}{3^{2s+1}}+\frac{1}{5^{2s+1}}\right)\,.$$

On a donc

$$1-\frac{1}{3^{2s}} \le \psi_s(1/2)-\psi_s(1/4)) = 1-\frac{1}{3^{2s+1}}-\frac{2}{5^{2s+1}} \le 1\,.$$

On en déduit l'encadrement de E_n suivant

$$2(2s)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1}\left(1-\frac{1}{3^{2s}}\right) \le E_s \le \frac{2s}{2s-1}\,2(2s)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1}\,, \tag{59}$$

et les équivalents

$$E_s \sim 2(2s)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s+1} \sim 8\sqrt{\frac{s}{\pi}}\left(\frac{4s}{e\pi}\right)^{2s} \sim \frac{2^{4s+1}}{\pi}\,B_s\,. \tag{60}$$

Le dernier équivalent est d'ailleurs un majorant de E_s, comme on le voit en utilisant les formules (28) et (55) :

$$E_s \le \frac{2^{4s+1}}{\pi}\,B_s\,. \tag{61}$$

Convergence uniforme de suites de polynômes de Bernoulli

Pour $n>0$, posons

$$\overline{P}_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{P_{2n}}{B_n} \quad \text{et} \quad \overline{P}_{2n-1} = (-1)^n\frac{n}{\pi}\,\frac{P_{2n-1}}{B_n}\,.$$

Soit également C et S les deux fonctions définies sur $[\,0,\,1\,]$ par

$$C(u) = \cos 2\pi u \quad \text{et} \quad S(u) = \sin 2\pi u\,.$$

Nous avons alors la proposition suivante.

PROPOSITION 3 Pour tout entier k positif, la suite $(\overline{P}_{2n}^{(k)})$ converge vers $C^{(k)}$ uniformément sur $[\,0,\,1\,]$, et la suite $(\overline{P}_{2n-1}^{(k)})$ converge vers $S^{(k)}$ uniformément sur $[\,0,\,1\,]$.

Grâce à la formule (49), on a

$$\overline{P}_{2n}(u) = \frac{2(2n)!}{B_n(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi u}{k^{2n}} \,.$$

Or d'après (57), le coefficient situé devant la série précédente converge vers 1. D'autre part

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi u}{k^{2n}} - \cos 2\pi u \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi u}{k^{2n}} \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \zeta(2n) - 1 \,,$$

et, d'après le majorant de $\zeta(2n)$ obtenu page 17, cette somme se majore par $1/(2n-1)$. Alors

$$|\overline{P}_{2n}(u) - C(u)| \leq \frac{2(2n)!}{B_n(2\pi)^{2n}} \, |P_{2n}(u) - C(u)| + C(u) \left| \frac{2(2n)!}{B_n(2\pi)^{2n}} - 1 \right| \leq \frac{2(2n)!}{B_n(2\pi)^{2n}(2n-1)} + \left| \frac{2(2n)!}{B_n(2\pi)^{2n}} - 1 \right| .$$

On en déduit la convergence uniforme sur $[\,0,\,1\,]$ de la suite $(\overline{P}_{2n})$ vers C.

De même, avec la relation (50), on obtient

$$\overline{P}_{2n-1}(u) = \frac{2(2n)!}{B_n(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi u}{k^{2n-1}} \,,$$

et un raisonnement analogue montre que la suite $(\overline{P}_{2n-1})$ converge vers S uniformément sur $[\,0,\,1\,]$.

En utilisant la relation (35), on constate que

$$\overline{P}'_{2n} = -2\pi \overline{P}_{2n-1} \,.$$

La suite $(\overline{P}'_{2n})$ converge donc vers $-2\pi S$, c'est-à-dire vers C'. On a également

$$\overline{P}'_{2n-1} = u_n 2\pi \overline{P}_{2n-2}$$

où

$$u_n = \frac{n(2n-1)}{2\pi^2} \frac{B_{n-1}}{B_n} \,.$$

Or, en utilisant un équivalent (57) ou (58) de B_n, on constate que la suite (u_n) converge vers 1. Alors $(\overline{P}'_{2n-1})$ converge vers $2\pi C$, c'est-à-dire vers S'.

A l'aide des deux formules de dérivations ci-dessus, on montre facilement par récurrence que les suites de dérivées $(P_{2n}^{(k)})$ et $(P_{2n-1}^{(k)})$ convergent uniformément vers les dérivées respectives $C^{(k)}$ et $S^{(k)}$.

Proposition 4 La suite (α_n) converge vers $1/4$.

Le nombre α_n est l'unique zéro de P_{2n}, donc de $\overline{P}_{2n}$, inclus dans $[0,\, 1/2]$. On sait qu'il est en fait dans $[0,\, 1/4]$. Soit ε dans l'intervalle $]0,\, 1/4[$. La fonction C est décroissante dans l'intervalle $[1/4-\varepsilon,\, 1/4]$. Comme la suite $(\overline{P}_{2n})$ converge uniformément vers C sur $[0,\, 1]$, il existe N tel que $n \geq N$ implique, pour tout u de $[0,\, 1]$,

$$|\overline{P}_{2n}(u) - C(u)| < \sin 2\pi\varepsilon\,.$$

Alors, si u appartient à $[0,\, 1/4-\varepsilon[$, on a

$$\overline{P}_{2n}(u) \geq C(u) - \sin 2\pi\varepsilon = C(u) - C(1/4-\varepsilon)\,.$$

Mais puisque C est une fonction décroissante sur $[0,\, 1/4-\varepsilon]$, on en déduit que

$$\overline{P}_{2n}(u) > 0\,.$$

Le polynôme $\overline{P}_{2n}$ ne s'annule pas dans l'intervalle $[0,\, 1/4-\varepsilon[$, et donc α_n appartient à $[1/4-\varepsilon,\, 1/4]$. Il en résulte que

$$|\alpha_n - 1/4| \leq \varepsilon\,,$$

ce qui montre que la suite (α_n) converge vers $\pi/4$.

Une propriété algébrique des polynômes de Bernoulli

Proposition 5 Dans l'espace $\mathscr{E}$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$, l'endomorphisme $\mathscr{L}$ défini par

$$\mathscr{L}(f)(u) = f\left(\frac{u+1}{2}\right) + f\left(\frac{u}{2}\right)$$

a pour valeurs propres non nulles les nombres 2^{1-i} lorsque i décrit $\mathbb{N}$. Le sous-espace propre associé à 2^{1-i} est une droite vectorielle engendrée par P_i.

• Soit s une valeur propre telle que

$$|s| > 2\,.$$

On a donc, pour tout u réel,

$$f\left(\frac{u+1}{2}\right) + f\left(\frac{u}{2}\right) = sf(u)\,. \tag{62}$$

Soit a un nombre réel plus grand que 1, et f un élément du sous-espace propre E_s associé à la valeur propre s. Posons

$$M_a = \sup_{u\in[-2a,\, 2a]} |f(u)|\,.$$

Si u appartient à l'intervalle $[-2a,\, 2a]$, alors

$$\frac{|u|}{2} \leq a \leq 2a \quad \text{et} \quad \frac{|u+1|}{2} \leq \frac{|u|+1}{2} \leq \frac{3a}{2} \leq 2a\,.$$

Donc, on a la majoration

$$|\mathscr{L}(f)(u)| \leq 2M_a \,,$$

d'où l'on déduit

$$|sf(u)| \leq 2M_a \,,$$

et finalement

$$|s|M_a \leq 2M_a \,.$$

ceci n'est possible que si M_a est nul. La fonction f est donc nulle sur $[\,-2a,\, 2a\,]$, pour tout $a \geq 1$. Il en résulte que f est identiquement nulle. Les valeurs propres de $\mathscr{L}$ appartiennent donc à l'intervalle $[\,-2,\, 2\,]$.

• Soit s une valeur propre non nulle de $\mathscr{L}$ et f dans E_s. Alors, en dérivant la relation (62), on obtient

$$\frac{1}{2}\, f'\left(\frac{u+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\, f'\left(\frac{u}{2}\right) = sf'(u)\,,$$

et il en résulte que f' appartient à E_{2s}. Donc, par récurrence, $f^{(k)}$ appartient à $E_{2^k s}$. Or, dès que

$$k > 1 - \frac{\ln|s|}{\ln 2}\,,$$

on a

$$2^k|s| > 2\,,$$

ce qui montre que $f^{(k)}$ est nulle. On en déduit que f est un polynôme de degré $k-1$ au plus.

Les seuls vecteurs propres de $\mathscr{L}$ associés à des valeurs propres non nulles sont des polynômes.

• Considérons $\mathscr{L}$ comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[u]$. Soit

$$e_i(u) = u^i\,.$$

L'image de e_i par $\mathscr{L}$ est un polynôme de degré i dont le terme de plus haut degré est $2^{1-i}u^i$. La matrice de $\mathscr{L}$ dans la base canonique est une matrice triangulaire supérieure, et les valeurs propres sont les éléments diagonaux de cette matrice, c'est-à-dire les coefficients des termes de plus haut degré de $\mathscr{L}(e_i)$. Les seules valeurs propres non nulles possibles de $\mathscr{L}$ sont donc les nombres 2^{1-i}, lorsque i décrit $\mathbb{N}$, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

• Comme on l'a vu plus haut, la suite $(P_n)_{n\geq 0}$ des polynômes de Bernoulli vérifie les conditions

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & P_0(u) = 1 & \\
\text{(ii)} & P_n'(u) = nP_{n-1}(u) & \text{si } n \geq 1 \\
\text{(iii)} & \displaystyle\int_0^1 P_n(u)\,du = 0 & \text{si } n \geq 1
\end{array}$$

et elle est déterminée de manière unique par ces conditions. En effet, si l'on suppose la suite construite jusqu'au rang $n-1$, la condition (ii) implique

$$P_n(u) = n \int_0^u P_{n-1}(s)\,ds + C$$

et la condition (iii) implique

$$0 = \int_0^1 P_n(u)\,du = n \int_0^1 \left(\int_0^u P_{n-1}(s)\,ds \right) du + C\,,$$

ce qui détermine la constante C. Donc P_n est obtenu de manière unique.

• Posons

$$H_n(u) = 2^{n-1} \left(P_n\left(\frac{u+1}{2}\right) + P_n\left(\frac{u}{2}\right) \right) .$$

On a

$$H_0(u) = 2^{-1}(1+1) = 1\,,$$

puis

$$H_n'(x) = 2^{n-2} \left(P_n'\left(\frac{u+1}{2}\right) + P_n'\left(\frac{u}{2}\right) \right) = n2^{n-2} \left(P_{n-1}\left(\frac{u+1}{2}\right) + P_{n-1}\left(\frac{u}{2}\right) \right) = nH_{n-1}(u)\,.$$

Enfin

$$\int_0^1 H_n(u)\,du = 2^{n-1} \left(\int_0^1 P_n\left(\frac{u+1}{2}\right) du + \int_0^1 P_n\left(\frac{u}{2}\right) du \right) ,$$

et, en effectuant un changement de variable dans les deux intégrales de droite, on obtient

$$\int_0^1 H_n(u)\,du = 2^{n-1} \left(\int_{1/2}^1 2P_n(u)\,du + \int_0^{1/2} 2P_n(u)\,du \right) = 2^n \int_0^1 P_n(u)\,du = 0\,.$$

Donc la suite $(H_n)_{n\geq 0}$ vérifie les conditions (i), (ii) et (iii). Alors, par unicité, on a, pour tout n entier

$$H_n = P_n\,,$$

ce qui achève la démonstration.

A partir de la relation (62), on peut obtenir une nouvelle relation entre les nombres a_n. En utilisant la formule du binôme, on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} 2^{-k} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^j \right) + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_{n-j} 2^{-j} u^j = 2^{1-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_{n-j} u^j\,.$$

D'où, en identifiant les coefficients de u^j,

$$\sum_{k=j}^{n} 2^{-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a_{n-k} + \binom{n}{j}2^{-j}a_{n-j} = 2^{1-n}\binom{n}{j}a_{n-j}\,,$$

soit

$$\sum_{k=j+1}^{n} 2^{-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a_{n-k} + \binom{n}{j}2^{1-j}a_{n-j} = 2^{1-n}\binom{n}{j}a_{n-j}\,,$$

ce qui donne finalement

$$(2^{1-n} - 2^{1-j})\binom{n}{j}a_{n-j} = \sum_{k=j+1}^{n} 2^{-k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}a_{n-k}\,, \tag{63}$$

et en particulier, si $j = 0$,

$$(2^{1-n} - 2)a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\binom{n}{k}a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k-n}\binom{n}{k}a_k\,. \tag{64}$$

Formules d'Euler-Mac Laurin

Soit f une fonction de classe C^{2n+1} sur $[0,\,1]$. Intégrons par partie l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 P_n(u)f^{(n)}(u)\,du\,.$$

On obtient

$$I_n = \Big[f^{(n-1)}(u)P_n(u)\Big]_0^1 - n\int_0^1 f^{(n-1)}(u)P_{n-1}(u)\,du\,. \tag{65}$$

et donc

$$I_1 = \frac{1}{2}\,(f(1) + f(0)) - \int_0^1 f(u)\,du\,, \tag{66}$$

et, pour $n > 1$,

$$I_n = a_n(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)) - nI_{n-1}\,. \tag{67}$$

En particulier, on obtient suivant la parité de n, pour $n = 2s$ avec $s \geq 1$,

$$I_{2s} = (-1)^{s+1}B_s(f^{(2s-1)}(1) - f^{(2s-1)}(0)) - 2sI_{2s-1}\,, \tag{68}$$

et pour $n = 2s - 1$ avec $s \geq 2$,

$$I_{2s-1} = -(2s-1)I_{2s-2}\,. \tag{69}$$

On montre alors facilement par récurrence que, pour $n \geq 1$,

$$I_{2n} = (2n)! \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{B_k}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) - \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) + \int_0^1 f(u)\, du \right) . \tag{70}$$

On en déduit donc

$$\int_0^1 f(u)\, du = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{B_k}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) + G_n \tag{71}$$

où

$$G_n = \frac{I_{2n}}{(2n)!} = -\frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Si maintenant f est de classe C^{2n+1} sur $[\,a,\, b\,]$, on applique la formule précédente à la fonction F définie par

$$F(u) = f(ub + (1-u)a)$$

et l'on obtient la formule d'Euler-Mac Laurin

$$\int_a^b f(u)\, du = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a)) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (b-a)^{2k} \frac{B_k}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + G_n \tag{72}$$

où le reste G_n s'obtient par une des deux formules

$$G_n = \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 (b-a)^{2n+1} P_{2n}(u) f^{(2n)}(ub + (1-u)a)\, du ,$$

où

$$G_n = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 (b-a)^{2n+2} P_{2n+1}(u) f^{(2n+1)}(ub + (1-u)a)\, du .$$

Remarquons que si f est un polynôme de degré au plus $2n+1$, la fonction $f^{(2n+1)}$ est constante et, puisque l'intégrale sur $[\,0,\, 1\,]$ de P_{2n+1} est nulle, le reste G_n est nul.

Lorsque n tend vers l'infini, il n'y a pas de raison pour que la suite (G_n) converge vers 0. On peut cependant utiliser la formule (72) pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale, en découpant l'intervalle $[\,a,\, b\,]$ en morceaux de longueur $(b-a)/p$, et en appliquant la formule dans les intervalles $[\,a + i(b-a)/p,\, a + (i+1)(b-a)/p\,]$. On obtient ainsi une formule qui généralise la méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u)\, du \quad &= \quad \frac{b-a}{2p} \left(f(b) + f(a) + 2 \sum_{i=1}^{p-1} f\left(a + i\frac{b-a}{p}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(b-a)^{2k}}{p^{2k}} \frac{B_k}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) + R_n , \end{aligned} \tag{73}$$

avec

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^{2n+2}}{p^{2n+1}} \frac{B_n}{(2n)!} \frac{1}{2\pi} \sup_{t \in [\,a,\,b\,]} |f^{(2n+1)}(t)|\,,$$

ou encore

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^{2n+1}}{p^{2n}} \frac{B_n}{(2n)!} \sup_{t \in [\,a,\,b\,]} |f^{(2n)}(t)|\,.$$

Ces majorations du reste, s'obtiennent en utilisant les formules (39) et (55).

La formule (72) permet aussi d'obtenir des développements limités de suites obtenues à partir des sommes partielles d'une série de terme général $f(n)$. On applique la formule dans l'intervalle $[\,i,\, i+1\,]$, où i est un entier compris entre m et $q-1$. On obtient

$$\int_i^{i+1} f(u)\,du = \frac{1}{2}(f(i) + f(i+1)) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(i+1) - f^{(2p-1)}(i)) + R_n(i)\,,$$

où

$$R_n(i) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 P_{2n}(u) f^{(2n)}(u+i)\,du = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 P_{2n+1}(u) f^{(2n+1)}(u+i)\,du\,.$$

Or, en faisant un changement de variable, et en remplaçant P_{2n+1} par φ_{2n+1}, on obtient, grâce à la périodicité de cette fonction,

$$R_n(i) = \frac{1}{(2n)!} \int_i^{i+1} \varphi_{2n}(u) f^{(2n)}(u)\,du = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_i^{i+1} \varphi_{2n+1}(u) f^{(2n+1)}(u)\,du\,.$$

On obtient alors en sommant

$$\int_m^q f(u)\,du = \frac{1}{2}(f(m) + f(q)) + \sum_{i=m+1}^{q-1} f(i) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(q) - f^{(2p-1)}(m)) + R_n(m,q)$$

où

$$R_n(m,q) = \frac{1}{(2n)!} \int_m^q \varphi_{2n}(u) f^{(2n)}(u)\,du = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_m^q \varphi_{2n+1}(u) f^{(2n+1)}(u)\,du\,.$$

On a donc finalement la formule suivante

$$(74)\quad \sum_{i=m}^{q} f(i) = \int_m^q f(u)\,du + \frac{1}{2}(f(m) + f(q)) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{B_p}{(2p)!} (f^{(2p-1)}(q) - f^{(2p-1)}(m)) - R_n(m,q)\,.$$

Appliquons cette relation dans l'intervalle $[\,0,\, q\,]$ à la fonction f définie par

$$f(u) = u^s\,,$$

où s est un entier strictement positif. On a, pour $k \leq s$,

$$f^{(k)}(u) = \frac{s!}{(s-k)!}\, u^{s-k} \,.$$

On obtient alors, puisque le reste est nul lorsque $s = 2n$ ou $s = 2n+1$,

$$\sum_{i=0}^{q} i^s = \frac{q^{s+1}}{s+1} + \frac{q^s}{2} + \frac{1}{s+1}\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\binom{s+1}{2p} B_p q^{s-2p+1} \,, \tag{75}$$

En particulier, on retrouve les formules classiques

$$\sum_{i=0}^{q} i = \frac{q(q+1)}{2} \quad , \quad \sum_{i=0}^{q} i^2 = \frac{q(q+1)(2q+1)}{6} \quad , \quad \sum_{i=0}^{q} i^3 = \left(\frac{q(q+1)}{2}\right)^2 \,, \tag{76}$$

et moins classique

$$\sum_{i=0}^{q} i^4 = \frac{q(6q^4+15q^3+10q^2-1)}{30} \,. \tag{77}$$

Remarque : en appliquant la formule à la fonction f définie par

$$f(u) = (au+b)^s$$

avec a, b entiers et s entier positif, on trouverait de même les sommes de type $\displaystyle\sum_{i=0}^{q}(ai+b)^s$.

En appliquant la formule (75) pour $q = 1$, on obtient

$$\frac{s}{2} - \frac{1}{2} = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\binom{s+1}{2p} B_p \,, \tag{78}$$

ce qui redonne les formules (8) ou (9) suivant la parité de s.

Appliquons maintenant la formule (74) dans l'intervalle $[\,m,\, q\,]$ à la fonction f définie par

$$f(u) = u^{-s}$$

où s est un entier strictement plus grand que 1. On a

$$f^{(k)}(u) = (-1)^k \frac{(s+k-1)!}{(s-1)!}\, u^{-s-k} \,,$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{q} \frac{1}{i^s} \quad &= \quad \frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{m^{s-1}} - \frac{1}{q^{s-1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^s} + \frac{1}{q^s}\right) \\ &\qquad + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p \frac{B_p}{(2p)!}\,\frac{(2p-2+s)!}{(s-1)!}\left(\frac{1}{q^{2p+s-1}} - \frac{1}{m^{2p+s-1}}\right) - R_n(m,q) \,.\end{aligned}$$

Lorsque q tend vers l'infini, la série de gauche converge. Tous les termes de l'égalité ont une limite. Donc $R_n(m,q)$ possède aussi une limite $R_{n,m}$. D'autre part, en utilisant les formules (55) et (56), et en majorant $4n/(2n-1)$ par 4, si $n \geq 1$, on obtient

$$|R_n(m,q)| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{B_n}{(2n)!}\int_m^q |f^{(2n+1)}(u)|\,du \leq \frac{4}{(2\pi)^{2n+1}}\,\frac{(s+2n-1)!}{(s-1)!}\left(\frac{1}{m^{2n+s}}-\frac{1}{q^{2n+s}}\right).$$

On peut donc faire tendre q vers l'infini, ce qui donne, pour n fixé,

$$|R_{n,m}| \leq \frac{4}{(2\pi)^{2n+1}}\,\frac{(s+2n-1)!}{(s-1)!}\,\frac{1}{m^{2n+s}} = \mathcal{O}(m^{-2n-s})\,. \tag{79}$$

Finalement

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{i^s} = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{m^{s-1}} + \frac{1}{2m^s} + \frac{1}{s-1}\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}B_p\binom{2p+s-2}{2p}\frac{1}{m^{2p+s-1}} + \mathcal{O}(m^{-2n-s})\,. \tag{80}$$

On a donc le développement limité en $1/m$ à l'ordre $2n+s-1$ du reste de la série définissant $\zeta(s)$.

Si s est pair, on peut avoir un développement limité des sommes partielles uniquement en fonction des nombres B_n. On écrit

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i^{2r}} = \zeta(2n) - \sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{i^{2r}} + \frac{1}{m^{2r}}\,,$$

et, puisque $\zeta(2n)$ s'exprime en fonction de B_n d'après la formule (51), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i^{2r}} &= \frac{(2\pi)^{2r}}{2(2r)!}B_r - \frac{1}{2r-1}\,\frac{1}{m^{2r-1}} + \frac{1}{2m^{2r}} \\ &\quad + \frac{1}{2r-1}\sum_{p=1}^{n}(-1)^pB_p\binom{2p+2r-2}{2p}\frac{1}{m^{2p+2r-1}} + \mathcal{O}(m^{-2n-2r})\,.\end{aligned} \tag{81}$$

En reprenant les calculs précédents lorsque $s=1$, on obtient cette fois

$$\sum_{i=m}^{q}\frac{1}{i} = \ln q - \ln m + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{m}\right) + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p\frac{B_p}{2p}\left(\frac{1}{q^{2p}}-\frac{1}{m^{2p}}\right) - R_n(m,q)\,,$$

ce que l'on écrit

$$\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{i} - \ln q - \left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i} - \ln m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{m}\right) + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p\frac{B_p}{2p}\left(\frac{1}{q^{2p}}-\frac{1}{m^{2p}}\right) - R_n(m,q)\,.$$

Lorsque q tend vers l'infini, la suite $\left(\sum_{i=m}^{q}\frac{1}{i} - \ln q\right)$ converge vers la constante d'Euler γ. Il en résulte que $(R_n(m,q))$ converge vers une limite $R_{n,m}$. La formule (79) reste vraie, et l'on a alors

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} = \ln m + \gamma + \frac{1}{2m} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{B_p}{2p} \frac{1}{m^{2p}} + \mathscr{O}(m^{-2n-1})\,. \tag{82}$$

La formule précédente donne un moyen de calculer des valeurs approchées de γ avec majoration explicite du reste donnée par la formule (79).

En recommençant les opérations avec la fonction f définie par

$$f(u) = \ln u\,,$$

on a alors

$$f^{(k)}(u) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{u^k}\,,$$

et l'on trouve

$$\sum_{i=m}^{q} \ln i = q \ln q - q - (m \ln m - m) + \frac{1}{2}(\ln q + \ln m) + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{B_p}{2p(2p-1)} \left(\frac{1}{q^{2p-1}} - \frac{1}{m^{2p-1}} \right) - R_n(m,q)\,.$$

Si l'on introduit

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln i - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n = \ln \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}}\,,$$

on sait, grâce à la formule de Stirling, que cette suite converge vers $\ln \sqrt{2\pi}$, et l'on a

$$S_q - S_m = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{B_p}{2p(2p-1)} \left(\frac{1}{q^{2p-1}} - \frac{1}{m^{2p-1}} \right) - R_n(m,q)\,.$$

De nouveau, en faisant tendre q vers l'infini, on trouve que $(R_n(m,q))$ converge, et que sa limite $R_{n,m}$ est un $\mathscr{O}(m^{-2n})$, ce qui donne,

$$S_m = \ln \sqrt{2\pi} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{B_p}{2p(2p-1)} \frac{1}{m^{2p-1}} + \mathscr{O}(m^{-2n})\,.$$

On obtient donc

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2m\pi} \exp\left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{B_p}{2p(2p-1)} \frac{1}{m^{2p-1}} + \mathscr{O}(m^{-2n}) \right)\,. \tag{83}$$

En développant l'exponentielle, cela permet d'avoir, par exemple, le développement limité suivant

$$m! \left(\frac{e}{m}\right)^m \frac{1}{\sqrt{2m\pi}} = 1 + \frac{1}{12m} + \frac{1}{288m^2} + \mathscr{O}\left(\frac{1}{m^3}\right)\,. \tag{84}$$

Autre expression des restes de la formule d'Euler-Mac Laurin

Les restes des formules (72) et (73) peuvent s'exprimer également en fonction des dérivées de f.

(72 bis)
$$G_n = (-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{2n+3}}{(2n+2)!} B_{n+1} f^{(2n+2)}(\zeta)\,,$$

et

(73 bis)
$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{2n+3}}{(2n+2)!} B_{n+1} \frac{f^{(2n+2)}(\zeta)}{p^{2n+2}}\,,$$

où ζ appartient à $\,]\,a,\, b\,[\,$.

On démontre tout d'abord la première formule pour une fonction f de classe C^{2n+2} sur $[\,0,\,1\,]$, en intégrant par parties

$$I_{2n+1} = \Big[f^{(2n+1)}(u) Q_{2n+1}(u)\Big]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+2)}(u) Q_{2n+1}(u)\, du\,.$$

Or, $Q_{2n+1}(0)$ et $Q_{2n+1}(1)$ sont nuls, donc

$$I_{2n+1} = -\int_0^1 f^{(2n+2)}(u) Q_{2n+1}(u)\, du\,.$$

Comme Q_{2n+1} est de signe constant dans $[\,0,\,1\,]$, on peut appliquer la première formule de la moyenne. Il existe ξ dans $]\,0,\,1\,[$ tel que

$$I_{2n+1} = -f^{(2n+2)}(\xi) \int_0^1 Q_{2n+1}(u)\, du\,.$$

Mais, d'après (43)

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= f^{(2n+2)}(\xi)\, \frac{1}{2n+2} \left(P_{2n+2}(0) - (2n+2) Q_{2n+1}(0)\right) \\
&= f^{(2n+2)}(\xi)\, \frac{1}{2n+2}\, P_{2n+2}(0) \\
&= (-1)^n f^{(2n+2)}(\xi)\, \frac{1}{2n+2}\, B_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$G_n = -\frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!} = (-1)^{n+1} f^{(2n+2)}(\xi)\, \frac{1}{(2n+2)!}\, B_{n+1}\,.$$

Si maintenant F est de classe C^{2n+2} sur $[\,a,\,b\,]$, on applique cette formule à la fonction F définie par

$$F(u) = f(ub + (1-u)a)$$

et il vient la formule (72 bis).

Pour le reste de (73 bis), on ne peut pas se contenter de sommer ceux de (72 bis). On revient tout d'abord à la formule avec reste intégral de (73) appliqué à $[\,x_i,\,x_{i+1}\,]$ avec $x_i = a + i(b-a)/p$. On posera

$$h = \frac{b-a}{p} = x_{i+1} - x_i\,.$$

On a

$$R_n = -\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{i=0}^{p-1}\int_0^1 \left(\frac{b-a}{p}\right)^{2n+2} P_{2n+1}(u) f^{(2n+1)}(ux_{i+1} + (1-u)x_i)\,du\,.$$

En effectuant le changement de variable

$$s = ux_{i+1} + (1-u)x_i = hu + x_i,$$

soit

$$u = \frac{s - x_i}{h}\,,$$

on a

$$R_n = -\frac{1}{(2n+1)!}\sum_{i=0}^{p-1} h^{2n+2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{2n+1}\left(\frac{s-x_i}{h}\right) f^{(2n+1)}(s)\,\frac{ds}{h}\,.$$

Comme $P_{2n+1}(0)$ et $P_{2n+1}(1)$ sont égaux, on définit une fonction S continue et $h-$périodique sur $\mathbb{R}$ en posant sur $[\,a,\,a+h\,]$

$$S(s) = P_{2n+1}\left(\frac{s-a}{h}\right)\,,$$

et en prolongeant par périodicité. On a alors sur $[\,x_i,\,x_{i+1}\,]$

$$S(s) = P_{2n+1}\left(\frac{s-x_i}{h}\right)\,,$$

et

$$R_n = -\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_a^b S(s) f^{(2n+1)}(s)\,ds\,.$$

Introduisons alors la primitive T de S définie par

$$T(u) = \int_a^u S(s)\,ds\,.$$

Sur l'intervalle $[\,a,\,a+h\,]$, on a

$$T(u)=\int_a^u P_{2n+1}\left(\frac{s-a}{h}\right)ds=h\int_0^{\frac{u-a}{h}} P_{2n+1}(s)\,ds=hQ_{2n+1}\left(\frac{s-a}{h}\right).$$

En particulier,

$$T(a+h)=hQ_{2n+1}(1)=0=T(a)\,.$$

La fonction T est également $h-$périodique, et

$$T(a)=T(b)=0\,.$$

On obtient, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} R_n &= -\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\Big[T(s)f^{(2n+1)}(s)\Big]_a^b-\int_a^b T(s)f^{(2n+2)}(s)\,ds\right)\\ &= \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_a^b T(s)f^{(2n+2)}(s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Comme T est de signe constant sur $[\,a,\,b\,]$, on applique de nouveau la formule de la moyenne. Il existe ζ dans $]\,a,\,b\,[$ tel que

$$R_n=\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\,f^{(2n+2)}(\zeta)\int_a^b T(s)\,ds\,.$$

Mais en raison de la périodicité de T, on a

$$\int_a^b T(s)\,ds=p\int_a^{a+h} T(s)\,ds\,.$$

Il reste à calculer cette intégrale. On a

$$\int_a^{a+h} T(s)\,ds=h\int_a^{a+h} Q_{2n+1}\left(\frac{s-a}{h}\right)ds=ph^2\int_0^1 Q_{2n+1}(u)\,du=h^2\,(-1)^{n+1}\frac{B_{n+1}}{2n+2}\,.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer dans R_n pour avoir l'expression voulue.

Une propriété arithmétique des nombres d'Euler

On utilisera dans ce paragraphe les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}\,,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2r+1 \\ (-1)^r 2^{2r} & \text{si } n = 2r \end{cases} .$$

PROPOSITION 6 Modulo 60, le nombre E_{2r} est congru à 5, et le nombre E_{2r+1} à 1.

On montre par récurrence que, pour $n \geq 1$,

$$E_n \equiv 3 + 2(-1)^n \mod 60\,. \tag{85}$$

La propriété est vraie pour $n = 1$, puisque E_1 vaut 1.

En partant de la formule (17), on écrit

$$E_n = (-1)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} (-1)^{n-k+1} E_k\,.$$

Si l'on suppose que la formule est vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$, on a

$$E_n \equiv (-1)^{n+1} + 3 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} (-1)^{n-k+1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} (-1)^{n+1} \mod 60\,,$$

c'est-à-dire

$$E_n \equiv (-1)^{n+1} \left(3 \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} (-1)^k + 2 \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} - 3(2 + (-1)^n) \right) \mod 60\,.$$

Pour $n = 2r$, on obtient

$$E_{2r} \equiv -(3 \times 2^{2r}(-1)^r + 2^{4r} - 9) \mod 60\,,$$

et donc

$$E_{2r} - 5 \equiv 3 \times 4^r(-1)^{r+1} - 4^{2r} + 4 \mod 60\,.$$

Le nombre de droite est divisible par 4. Par ailleurs

$$3 \times 4^r(-1)^{r+1} - 4^{2r} + 4 \equiv 4 - 4^{2r} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod 3\,,$$

et

$$3 \times 4^r(-1)^{r+1} - 4^{2r} + 4 \equiv 3(-1)^r(-1)^{r+1} - (-1)^{2r} - 1 \equiv -5 \equiv 0 \mod 5\,.$$

Il en résulte que $E_{2r} - 5$ est divisible par 60.

Pour $n = 2r + 1$, on a cette fois
$$E_{2r+1} \equiv 4^{2r+1} - 3 \mod 60\,,$$
donc
$$E_{2r+1} - 1 \equiv 4^{2r+1} - 4 \mod 60\,.$$
Le nombre de droite est divisible par 4. Par ailleurs
$$4^{2r+1} - 4 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \mod 3\,,$$
et
$$4^{2r+1} - 4 \equiv (-1)^{2r+1} + 1 \equiv 0 \mod 5\,.$$
Il en résulte que $E_{2r+1} - 1$ est divisible par 60.

Voici la liste des nombres d'Euler jusqu'à 12.

E_1	=	1	E_7	=	199 360 981
E_2	=	5	E_8	=	19 391 512 145
E_3	=	61	E_9	=	2 404 879 675 441
E_4	=	1 385	E_{10}	=	370 371 188 237 525
E_5	=	50 521	E_{11}	=	69 348 874 393 137 901
E_6	=	2 702 765	E_{12}	=	15 514 534 163 557 086 905

Le théorème de von Staudt

Théorème On peut écrire B_n sous la forme

(86)
$$B_n = G_n + (-1)^n \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|2n}} \frac{1}{p}\,,$$

où G_n est un nombre entier.

En reprenant le développement en série entière
$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\, z^n\,,$$

il s'agit de démontrer que le nombre

$$a_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|2n}} \frac{1}{p}$$

est entier.

• Pour tout nombre p premier, et tout entier positif s, posons

$$\varepsilon_s(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p-1 \mid s \\ 0 & \text{si} \quad p-1 \nmid s \end{cases},$$

et montrons que l'on a alors

$$\sum_{r=1}^{p-1} r^s \equiv -\varepsilon_s(p) \mod p\,.$$

Si $p-1$ divise s, il existe t entier tel que

$$s = t(p-1)\,.$$

Lorsque r varie de 1 à $p-1$, le nombre p ne divise par r^t, donc, d'après le théorème de Fermat

$$r^s = r^{(p-1)t} = (r^t)^{p-1} \equiv 1 \mod p\,,$$

d'où

$$\sum_{r=1}^{p-1} r^s \equiv p-1 \equiv -1 = -\varepsilon_s(p) \mod p\,.$$

Si $p-1$ ne divise pas s, soit $\dot{g}$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. L'application de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans lui-même qui à $\dot{x}$ associe $\dot{g}\dot{x}$ est injective. En effet, puisque p est premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un corps, et la nullité de $\dot{g}\dot{x}$ implique celle de $\dot{x}$. Cette application est alors bijective. Donc

$$\sum_{r=1}^{p-1} \dot{r}^s = \sum_{r=1}^{p-1} (\dot{g}\dot{r})^s\,.$$

Il en résulte que

$$(g^s - 1)\sum_{r=1}^{p-1} r^s \equiv 0 \mod p\,.$$

Si p divisait $g^s - 1$ pour tout g, alors il diviserait le PGCD de l'ensemble $\{g^s - 1 \,|\, 2 \leq g \leq s\}$. Mais l'on sait (voir BF par exemple), que celui-ci vaut $s+1$ si $s+1$ est premier, et 1 sinon. La seule possibilité est donc que l'on ait

$$p = s + 1$$

c'est-à-dire

$$p - 1 = s\,,$$

d'où une contradiction. Il existe donc un entier s tel que

$$g^s - 1 \not\equiv 0 \mod p\,,$$

et l'on en tire

$$\sum_{r=1}^{p-1} r^s \equiv 0 = -\varepsilon_s(p) \mod p\,.$$

Le résultat est donc vrai dans tous les cas.

Grâce au résultat précédent, la démonstration du théorème se ramène à montrer que le nombre

$$a_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|2n}} \frac{\varepsilon_{2n}(p)}{p}$$

est entier.

• La démonstration se fait par récurrence sur n. On a

$$a_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\,,$$

et la propriété est vraie à l'ordre 1.

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n-1$, pour $n \geq 2$, et montrons qu'elle est vraie à l'ordre n.

Soit q un nombre premier et $s \geq 1$. La formule (75) s'écrit

$$\sum_{r=0}^{q-1} r^s = \frac{1}{s+1} \sum_{p=0}^{s} \binom{s+1}{p} a_p q^{s-p+1}\,.$$

C'est d'ailleurs aussi la conséquence du développement en série entière du produit

$$x \sum_{r=0}^{q-1} e^{xr} = (e^{xq} - 1)\, \frac{x}{e^x - 1}\,.$$

Puisque

$$\frac{1}{s+1} \binom{s+1}{p} = \frac{1}{s+1-p} \binom{s}{p}\,,$$

on a également

(87) $$\sum_{r=0}^{q-1} r^s = \sum_{p=0}^{s} \frac{1}{s+1-p} \binom{s}{p} a_p q^{s-p+1}\,.$$

Donc

$$-\sum_{r=0}^{q-1} r^s + \sum_{p=0}^{s} \frac{1}{s+1-p} \binom{s}{p} a_p q^{s-p+1} = 0\,.$$

Alors

$$\varepsilon_s(q) + \sum_{p=0}^{s} \frac{1}{s+1-p}\binom{s}{p} a_p q^{s-p+1} \equiv 0 \mod q\,. \tag{88}$$

Si $s = 2n$, le terme a_{s-1} est nul, et donc la somme

$$\varepsilon_s(q) + \sum_{p=0}^{s-2} \frac{1}{s+1-p}\binom{s}{p}(q^2 a_p) q^{s-p-1} + q a_s$$

est divisible par q. Il en résulte que la somme

$$S(s,q) = \frac{\varepsilon_s(q)}{q} + \sum_{p=0}^{s-2} \frac{1}{s+1-p}\binom{s}{p}(q a_p) q^{s-p-1} + a_s$$

est un nombre entier.

L'hypothèse de récurrence permet de dire que le dénominateur des nombres a_p non nuls n'a pas de facteur carré. Donc le dénominateur de $q a_q$ n'est pas divisible par q. Alors, si le dénominateur de $\dfrac{1}{s+1-p}\dbinom{s}{p}(q a_p) q^{s-p-1}$ était divisible par q, celui de $\dfrac{1}{s+1-p} q^{s-p-1}$ le serait aussi, et $s+1-p$ serait un multiple de q^{s-p}. Donc

$$s + 1 - p \geq q^{s-p}\,.$$

Mais, par ailleurs, $s-p$ est supérieur ou égal à 2, lorsque p varie de 0 à $s-2$. Donc

$$s + 1 - p < 2^{s+1-p} \leq q^{s+1-p}\,.$$

On obtient une contradiction. Le dénominateur de $\dfrac{1}{s+1-p}\dbinom{s}{p}(q a_p) q^{s-p-1}$ n'est donc pas divisible par q. Alors, le nombre $a_s + \dfrac{\varepsilon_s(q)}{q}$ est une somme de nombres rationnels dont aucun dénominateur n'est divisible par q. Donc son dénominateur n'est pas divisible par q.

Si $q-1$ ne divise pas $2n$, alors $\varepsilon_s(q)/q$ est nul, et q n'est pas un facteur premier du dénominateur de a_{2n}. Ce ne sera donc pas non plus un diviseur du dénominateur de

$$a_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1 \mid 2n}} \frac{\varepsilon_{2n}(p)}{p}\,.$$

Si maintenant $q-1$ divise $2n$, on peut alors écrire

$$a_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1 \mid 2n}} \frac{\varepsilon_{2n}(p)}{p} = a_{2n} + \frac{\varepsilon_s(q)}{q} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \neq q \\ p-1 \mid 2n}} \frac{\varepsilon_{2n}(p)}{p}\,,$$

et ce nombre rationnel a un dénominateur qui n'est pas non plus divisible par q. Donc, quel que soit le nombre premier q, il ne divise pas le dénominateur de

$$a_{2n} + \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|2n}} \frac{\varepsilon_{2n}(p)}{p} .$$

Il en résulte que le dénominateur vaut 1, ce qui prouve que le nombre est entier, et achève la démonstration

Ecrivons

$$B_n = \frac{p_n}{q_n} ,$$

avec p_n et q_n premiers entre eux. Il résulte du théorème de von Staudt que

(89)
$$q_n = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p-1|2n}} p ,$$

et donc que les facteurs premiers de q_n sont tous de degré 1.

Corollaire 1 Si n est un nombre premier de la forme $3k+1$, alors $B_n - 1/6$ est entier.

Si p est un nombre premier tel que $p-1$ divise $2n = 6k+2$, le nombre $p-1$ ne peut prendre qu'une des valeurs 1, 2, $3k+1$, $6k+2$, donc p ne peut valoir que 2, 3, $3k+2$, $6k+3$. Mais $3k+2 = n+1$ ne peut être premier puisque n est premier supérieur à 3, et $6k+3$ n'est pas premier si k est non nul. Donc les deux seuls facteurs premiers possibles de q_n sont 2 et 3.

Corollaire 2 Le dénominateur q_n de B_n est toujours divisible par 6, et si n est pair il est divisible par 30.
De manière générale, si p est premier impair, il divise $q_{(p-1)n/2}$, pour tout entier $n \geq 1$.

En en effet $p = 2$ et $p = 3$ sont des nombres premiers tels que $p-1$ divise $2n$, et si $n = 2k$, le nombre $p = 5$ est un nombre premier tel que $p-1$ divise $4k$. De manière générale, $p-1$ divise $(p-1)n$, et si p est impair alors $p-1$ est pair et p divise $q_{(p-1)n/2}$.

Remarque : la formule (18) montre que q_n divise $2^{2n}(2^{2n}-1)$, et comme 2 est un facteur premier de degré 1 de q_n, ce nombre divise nécessairement $2(2^{2n}-1)$. En fait on peut démontrer (voir BF) que q_n est le PGCD des nombres $p^{2n+1} - p$, lorsque p décrit $\mathbb{N}^*$.

Voici la liste des nombres de Bernoulli jusqu'à 13.

$$
\begin{array}{lclclclclcl}
B_1 & = & \dfrac{1}{6} & \quad & G_1 & = & 1 & \quad & q_1 & = & 2 \times 3 \\
B_2 & = & \dfrac{1}{30} & & G_2 & = & -1 & & q_2 & = & 2 \times 3 \times 5 \\
B_3 & = & \dfrac{1}{42} & & G_3 & = & 1 & & q_3 & = & 2 \times 3 \times 7 \\
B_4 & = & \dfrac{1}{30} & & G_4 & = & -1 & & q_4 & = & 2 \times 3 \times 5 \\
B_5 & = & \dfrac{5}{66} & & G_5 & = & 1 & & q_5 & = & 2 \times 3 \times 11 \\
B_6 & = & \dfrac{691}{2\,730} & & G_6 & = & -1 & & q_6 & = & 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \\
B_7 & = & \dfrac{7}{6} & & G_7 & = & 2 & & q_7 & = & 2 \times 3 \\
B_8 & = & \dfrac{3\,617}{510} & & G_8 & = & 6 & & q_8 & = & 2 \times 3 \times 5 \times 17 \\
B_9 & = & \dfrac{43\,867}{798} & & G_9 & = & 56 & & q_9 & = & 2 \times 3 \times 7 \times 19 \\
B_{10} & = & \dfrac{174\,611}{330} & & G_{10} & = & 528 & & q_{10} & = & 2 \times 3 \times 5 \times 11 \\
B_{11} & = & \dfrac{854\,513}{138} & & G_{11} & = & 6\,193 & & q_{11} & = & 2 \times 3 \times 23 \\
B_{12} & = & \dfrac{236\,364\,091}{2\,730} & & G_{12} & = & 86\,579 & & q_{12} & = & 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \\
B_{13} & = & \dfrac{8\,553\,103}{6} & & G_{13} & = & 1\,425\,518 & & q_{13} & = & 2 \times 3
\end{array}
$$