

Avant-propos

Les fonctions hypergéométriques sont une généralisation naturelle des fonctions usuelles telles que l'exponentielle, le logarithme, les fonctions circulaires, les fonctions trigonométriques réciproques, etc. Le terme *hypergéométrique* a été introduit par Wallis en 1656, mais c'est Euler qui a initié l'étude des fonctions que nous qualifions maintenant d'hypergéométriques dans la deuxième moitié du XVIII^e siècle. Cette étude s'est développée aux XIX^e et XX^e siècles grâce notamment à Gauss, Kummer, Riemann, Goursat, Tricomi, Bayley, Slater et bien d'autres. Elle se poursuit de nos jours très activement et de nombreux travaux de recherche sont consacrés aux fonctions hypergéométriques chaque année.

L'étude des fonctions hypergéométriques présente un triple intérêt. D'abord, ces fonctions donnent lieu à une foule de très beaux résultats, notamment à des formules assez stupéfiantes. Ensuite, elles interviennent dans de nombreux autres domaines des mathématiques, de manière plus ou moins visible. Enfin, et ce dernier aspect n'est pas le moindre, elles font partie de la vaste classe des *fonctions spéciales* de la physique mathématique. Dans ce cadre elles sont utilisées notamment pour la résolution d'équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables.

Dans ce livre, nous proposons une introduction à la théorie des fonctions hypergéométriques. Cependant, le sujet est très vaste, comme on vient de le voir. Dans le cadre nécessairement réduit de cet ouvrage, il a par conséquent été nécessaire de limiter notre propos. C'est ainsi que, à regret, nous n'abordons pas ici le sujet des équations aux dérivées partielles, qui nous entraînerait trop loin. Néanmoins, nous nous sommes efforcés de présenter le plus grand nombre possible de fonctions utiles dans les applications. Ces fonctions spéciales, reliées aux fonctions hypergéométriques, sont présentées dans le corps du texte ou dans les exercices corrigés. L'index alphabétique, situé en fin de volume, permet de les retrouver facilement.

Ce livre a été conçu pour être étudié dès la fin de la deuxième année après le baccalauréat. Ainsi, les prérequis sont les notions d'analyse mathématique qui s'enseignent en première et deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles et des licences 1 et 2 de mathématiques, de physique et d'ingénierie à l'Université : calcul différentiel et intégral, séries entières, équations différentielles, etc.

Compte tenu de cet objectif, nous avons limité notre exposé aux fonctions de variable *réelle*. Bien sûr, nous ne nous interdisons pas l'utilisation des nombres complexes quand ils sont utiles (notamment dans le chapitre 8, où nous définissons pour nos besoins le polylogarithme de variable complexe). Mais nous n'utilisons pas la notion de fonction holomorphe ni le théorème des résidus, de façon à rester dans les limites des prérequis indiqués précédemment. Ceci permet de présenter les choses beaucoup plus simplement. De plus, un coup d'œil à la table des matières suffit à montrer qu'il y a déjà beaucoup à dire dans le cadre des fonctions de variable réelle... Bien entendu, une étude plus approfondie et avancée des fonctions hypergéométriques ne peut se faire que dans le cadre de la théorie de Cauchy des fonctions de variable complexe. D'ailleurs, les ouvrages cités dans la bibliographie (située en fin de volume) se situent tous dans ce cadre.

Dans cette bibliographie, les références marquées d'un astérisque sont accessibles sur Internet. En outre, pour compenser d'une certaine façon le volume (relativement) limité autorisé par un livre, des compléments au format pdf ainsi que des liens vers des notices historiques sont proposés sur notre site Internet, à l'adresse <https://danielduverney.fr>.

Pour conclure, je remercie Géry Huvent et Lionel Ponton pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans l'écriture de ce livre. Lionel Ponton, en particulier, s'est chargé de la relecture de l'ensemble du texte et a suggéré de nombreuses améliorations (notamment en corrigeant fautes de frappes et erreurs et en proposant des exercices). Cependant, il va de soi que les imperfections qui pourraient demeurer ici ou là ne sauraient être attribuées qu'à l'auteur !